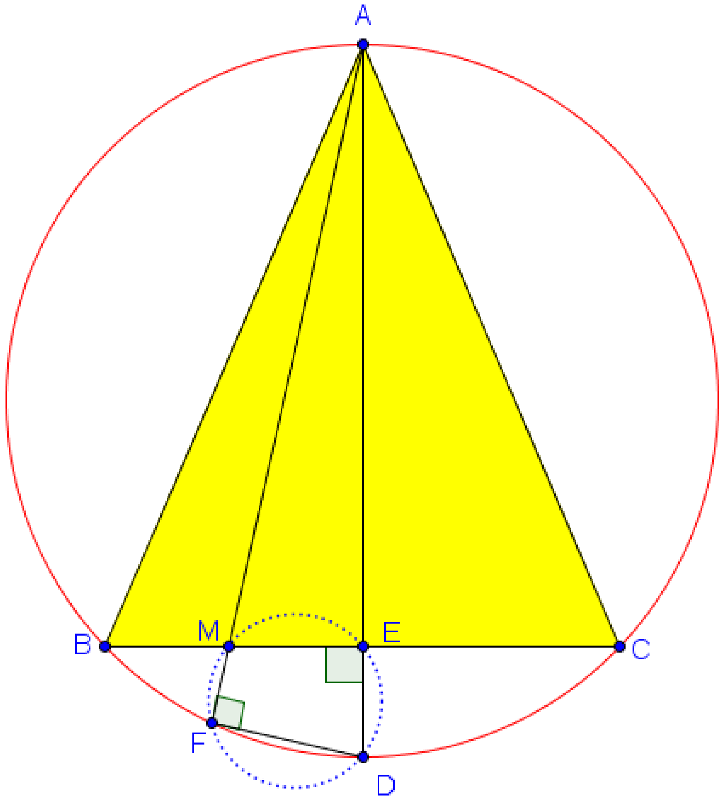
Problema 746.-
Dado un triángulo isósceles ABC y un punto variable M sobre la base.
Probar que $AM^2 + (CM \cdot MB)$ es constante.

PAPELIER, G. (1953) "Exercices de Géométrie Moderne" Tome 1.
Librarie Vuibert. París (p.32).

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Si construimos la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, notamos que la mediatriz de la base es interceptada en su punto medio E y a la circunferencia en el punto D. Asimismo, la ceviana AM intercepta a la circunferencia circunscrita en el punto F.



Al tratar de probar la igualdad solicitada, podemos considerar la propiedad de la potencia del punto M respecto de la circunferencia construida.

En efecto,

$$AM^2 + (CM \cdot MB) = AM^2 + AM \cdot MF$$

$$AM^2 + (CM \cdot MB) = AM(AM + MF)$$

$$AM^2 + (CM \cdot MB) = AM \cdot AF$$

Probaremos ahora que:

$$AM \cdot AF = cte$$

Observamos que los puntos $M, E, F\ y\ D$ son concíclicos. Por tanto, los triángulos $AMD\ y\ AEF$ serán semejantes. De esta semejanza, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{AE}{AF} \to AM \cdot AF = AD \cdot AE \quad (I)$$

Ahora bien, AD =2R, R= radio de la circunferencia circunscrita y $AE = h_a$ $(altura\ de\ la\ base)$.
Por otro lado, $S[ABC] = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R} \to 2R \cdot h_a = b \cdot c = c^2 = AB^2$

Así podemos expresar la igualdad (I) de la forma:

$$AM \cdot AF = AD \cdot AE = 2R \cdot h_a = AB^2$$

$$AM^2 + (CM \cdot MB) = AM \cdot AF = AD \cdot AE = AB^2$$

$$AM^2 + (CM \cdot MB) = AB^2 \qquad (cte) \quad cqd \quad \blacksquare$$