

Problema 746

Donat un triangle isòsceles $\triangle ABC$ i un punt variable M sobre la base $\overline{BC}$. Demostreu que $\overline{AM}^2 + \overline{CM} \cdot \overline{MB}$ és constant.

38. Dado un triángulo isósceles $\triangle ABC$

y un punto variable M sobre la base $\overline{BC}$. Demostrar que $\overline{AM}^2 + \overline{CM} \cdot \overline{MB}$ es constante.

PAPELIER, G. Exercices de Géométrie Moderne” Tome 1. Librarie Vuibert .París. 1953.

Solució de Ricard Peiró:

Siga el triangle isòsceles $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC} = b$, $B = C$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABM$:

$$\overline{AM}^2 = b^2 + \overline{BM}^2 - 2b\overline{BM} \cdot \cos B \quad (1)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle AMC$:

$$\overline{AM}^2 = b^2 + \overline{CM}^2 - 2b\overline{CM} \cdot \cos B \quad (2)$$

Restant les expressions (1) (2):

$$\overline{BM}^2 - \overline{CM}^2 = 2b \cdot \cos B (\overline{BM} - \overline{CM}) \quad (3)$$

$$\overline{BM} + \overline{CM} = 2b \cdot \cos B \quad (4)$$

Elevant al quadrat l'expressió (4):

$$\overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 = -2\overline{BM} \cdot \overline{CM} + 4b^2 \cdot \cos^2 B \quad (5)$$

Sumant les expressions (1) (2):

$$2 \cdot \overline{AM}^2 = 2 \cdot b^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 - 2b \cos B (\overline{BM} + \overline{CM}) \quad (6)$$

Substituint les expressions (4) i (5) en l'expressió (6):

$$2 \cdot \overline{AM}^2 = 2 \cdot b^2 + -2 \cdot \overline{BM} \cdot \overline{CM} + 4b^2 \cdot \cos^2 B - 2b \cos B (2b \cdot \cos B) \quad (7)$$

Simplificant:

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM} \cdot \overline{CM} = b^2.$$

