

Problema 746

38. Dado un triángulo isósceles $\triangle ABC$

y un punto variable M sobre la base $\overline{BC}$. Demostrar que $\overline{AM}^2 + \overline{CM} \cdot \overline{MB}$ es constante.

PAPELIER, G. Exercices de Géométrie Moderne" Tome 1. Librarie Vuibert .París. 1953.

Solución de Ricard Peiró:

Siga el triángulo isósceles $\triangle ABC$, $\overline{AB} = \overline{AC} = b$, $B = C$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\triangle ABM$:

$$\overline{AM}^2 = b^2 + \overline{BM}^2 - 2b\overline{BM} \cdot \cos B \quad (1)$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\triangle AMC$:

$$\overline{AM}^2 = b^2 + \overline{CM}^2 - 2b\overline{CM} \cdot \cos B \quad (2)$$

Restando las expresiones (1) (2):

$$\overline{BM}^2 - \overline{CM}^2 = 2b \cdot \cos B (\overline{BM} - \overline{CM}) \quad (3)$$

$$\overline{BM} + \overline{CM} = 2b \cdot \cos B \quad (4)$$

Elevando al cuadrado la expresión (4):

$$\overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 = -2\overline{BM} \cdot \overline{CM} + 4b^2 \cdot \cos^2 B \quad (5)$$

Sumando las expresiones (1) (2):

$$2 \cdot \overline{AM}^2 = 2 \cdot b^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 - 2b \cos B (\overline{BM} + \overline{CM}) \quad (6)$$

Substituyendo las expresiones (4) y (5) en la expresión (6):

$$2 \cdot \overline{AM}^2 = 2 \cdot b^2 + -2 \cdot \overline{BM} \cdot \overline{CM} + 4b^2 \cdot \cos^2 B - 2b \cos B (2b \cdot \cos B) \quad (7)$$

Simplificando:

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM} \cdot \overline{CM} = b^2.$$

