

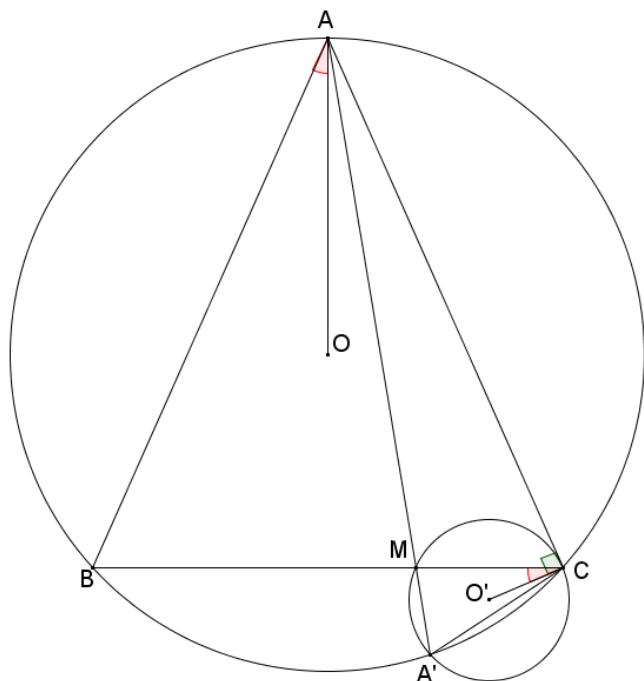
Problema 746

Propuesto por Ricard Peiró i Estruch Profesor de Matemáticas del IES "Abastos" (València)

Dado un triángulo isósceles y un punto variable M sobre la base . Demostrar que $AM^2 + (CM \cdot MB)$ es constante.

PAPELIER, G. (1953) "Exercices de Géométrie Moderne" Tome 1. Librairie Vuibert. París (p.32).

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



On trace le cercle circonscrit au triangle ABC et on désigne par A' le deuxième point d'intersection de la droite AM avec ce cercle. On a la relation $CM \cdot MB = AM \cdot MA'$.

Dès lors $AM^2 + CM \cdot MB$ s'écrit $AM^2 + AM \cdot MA' = AM \cdot (AM + MA') = AM \cdot AA'$.

Soit O' le centre du cercle circonscrit au triangle A'MC, on a $\angle CO'M = 2 \angle CA'M = 2 \angle ABC$.

D'où $\angle O'CM = (180^\circ - \angle CO'M)/2 = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \angle ACB$.

Il en résulte que $\angle ACB + \angle O'CM = 90^\circ$ et la droite AC perpendiculaire à O'C est tangente au cercle circonscrit au triangle CMA', ce qui entraîne $AM \cdot AA' = AC^2 = \text{constante}$.