

Problema 746

38. Dado un triángulo isósceles y un punto variable M sobre la base BC.

Demostrar que $AM^2 + (CM \cdot MB)$ es constante.

PAPELIER, G. (1953) "[Exercices de Géométrie Moderne](#)" Tome 1. Librarie Vuibert. París (p.32).

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

La solución se encuentra en el propio documento de referencia, aplicando el teorema de Stewart.

38. On donne un triangle isocèle ABC, et on prend un point M variable sur la base BC. Démontrer que la quantité

$$\overline{AM}^2 + \overline{CM} \cdot \overline{MB}$$

est constante.



Appliquons la formule de Stewart aux trois points B, M, C et au point A, situé en dehors de BC; nous avons

$$\overline{AM}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{AB}^2 \cdot \overline{CM} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{MB} + \overline{BC} \cdot \overline{CM} \cdot \overline{MB} = 0,$$

ou, en remplaçant $\overline{AC}^2$ par $\overline{AB}^2$,

$$\overline{AM}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{AB}^2 (\overline{CM} + \overline{MB}) + \overline{BC} \cdot \overline{CM} \cdot \overline{MB} = 0.$$

Or $\overline{CM} + \overline{MB} = \overline{CB} = -\overline{BC}$, et la relation devient

$$\overline{AM}^2 \cdot \overline{BC} - \overline{AB}^2 \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CM} \cdot \overline{MB} = 0,$$

ou, enfin, en divisant par $\overline{BC}$,

$$\overline{AM}^2 + \overline{CM} \cdot \overline{MB} = \overline{AB}^2.$$

El valor de esa constante es el cuadrado del lado AB.