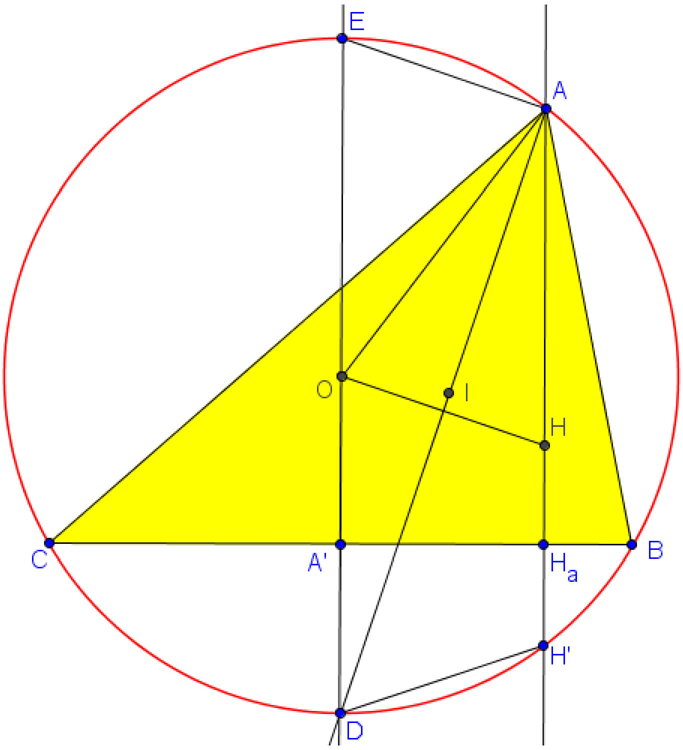
Problema 747.-
Sobre un ángulo de 60º (I)

Sea ABC un triángulo con AB<AC. Sean I el incentro, O el circuncentro y H el ortocentro del mismo. La recta AI es mediatriz de OH si y sólo si <A=60º.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Dem.-
Si realizamos la construcción indicada, podemos observar los siguientes hechos de interés:



$\Rightarrow$
Si AI es mediatriz de OH, entonces AH=AO=OE=R, radio de la circunferencia circunscrita.
Por tanto EA=OH siendo además estos segmentos, paralelos entre sí. Como quiera que en el trapecio isósceles EAH'D, se tiene que EA=DH', también será cierto que OH=DH' y como el lado BC es mediatriz del segmento HH', lo será también del segmento OD. Por tanto, OA'=A'D y así OC=CD =R. Además se tiene que OC=OD=R.
Por tanto, resulta que el $\Delta \mathrm{OCD}$ es equilátero. Como el ángulo $\measuredangle COD = \measuredangle A \rightarrow \measuredangle \boldsymbol{A} = \mathbf{60º}$.

$\Leftarrow$
Si $\measuredangle \mathbf{A} = \mathbf{60º} \rightarrow \mathrm{OA}' = \mathrm{A}'\mathrm{D}$ ya que el triángulo ΔOCD es equilátero al tener los ángulos iguales.
En efecto, $\measuredangle \mathrm{A}'\mathrm{CD} = 30º$ y $\measuredangle \mathrm{CA}'\mathrm{D} = 90º \rightarrow \measuredangle \mathrm{ODC} = 60º$. Al ser $\measuredangle COD = 60º \rightarrow$ $\Delta\mathrm{OCD}$ es equilátero $\rightarrow$ $\mathrm{OA}' = \mathrm{A}'\mathrm{D}$. Se sabe además que $HH_a = H_aH'$. Por tanto, el trapecio OHH'D es isósceles, como lo es también el trapecio EAH'D. Entonces, los lados AE y HO son también paralelos y al ser DE, diámetro de la circunferencia circunscrita, será perpendicular al lado AE y, así también lo será al segmento OH.
Por tanto, AI es perpendicular a OH y, como AH=OE=AO=R, **AI será mediatriz de OH.**