Problema 747

Sobre un ángulo de 60º(I)

Sea ABC un triángulo con AB<AC

Sean I el incentro, O el circuncentro y H el ortocentro

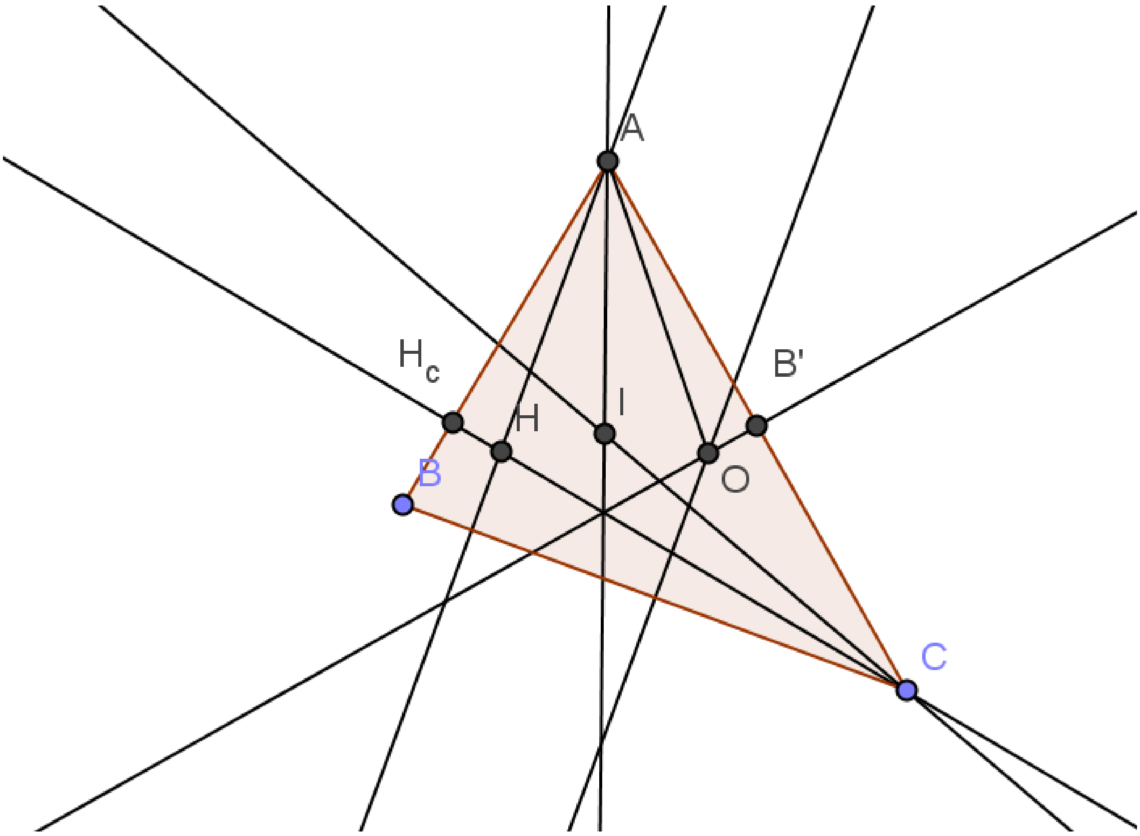
La recta AI es mediatriz de OH si y sólo si <A=60º.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución del director.

Veamos en primer lugar que si <A=60º, es cierto que AI es mediatriz de OH.

Consideremos que el triángulo sea acutángulo.




Es <HAB= 90º-β, <OAC=90º-β, <HAI=<IAO=β-30º.

Así AI es bisectriz del triángulo AHO.

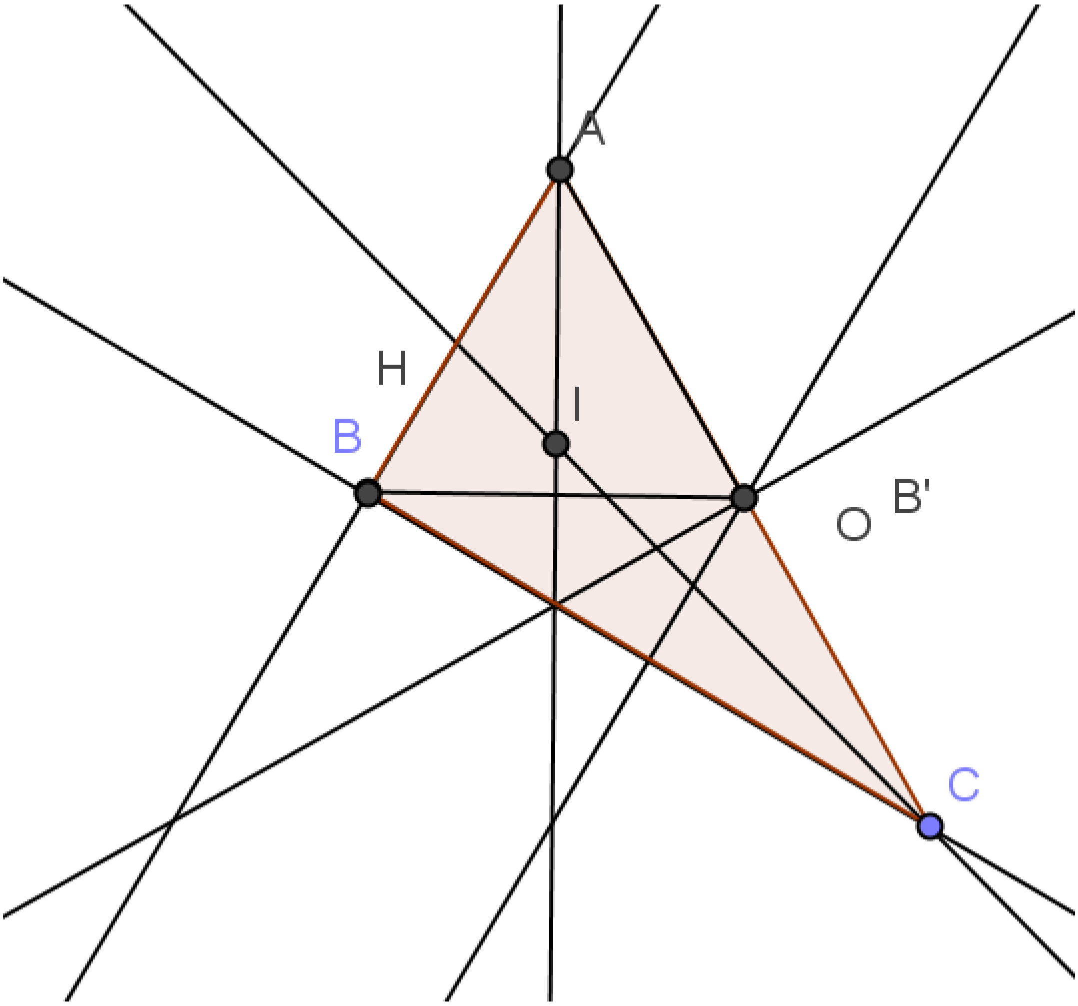
Sea $H_c$ el pie de la altura de C sobre AB. El triángulo $AH_cC$ es rectángulo 60º 90º 30º, por lo que $AH_c$ =AB' siendo B' el punto medio de AC. El triángulo $AHH_c$ tiene de ángulos 90º-β, β, 90º

Por otra parte el triángulo AOB' tiene de ángulos 90º-β, β, 90º.

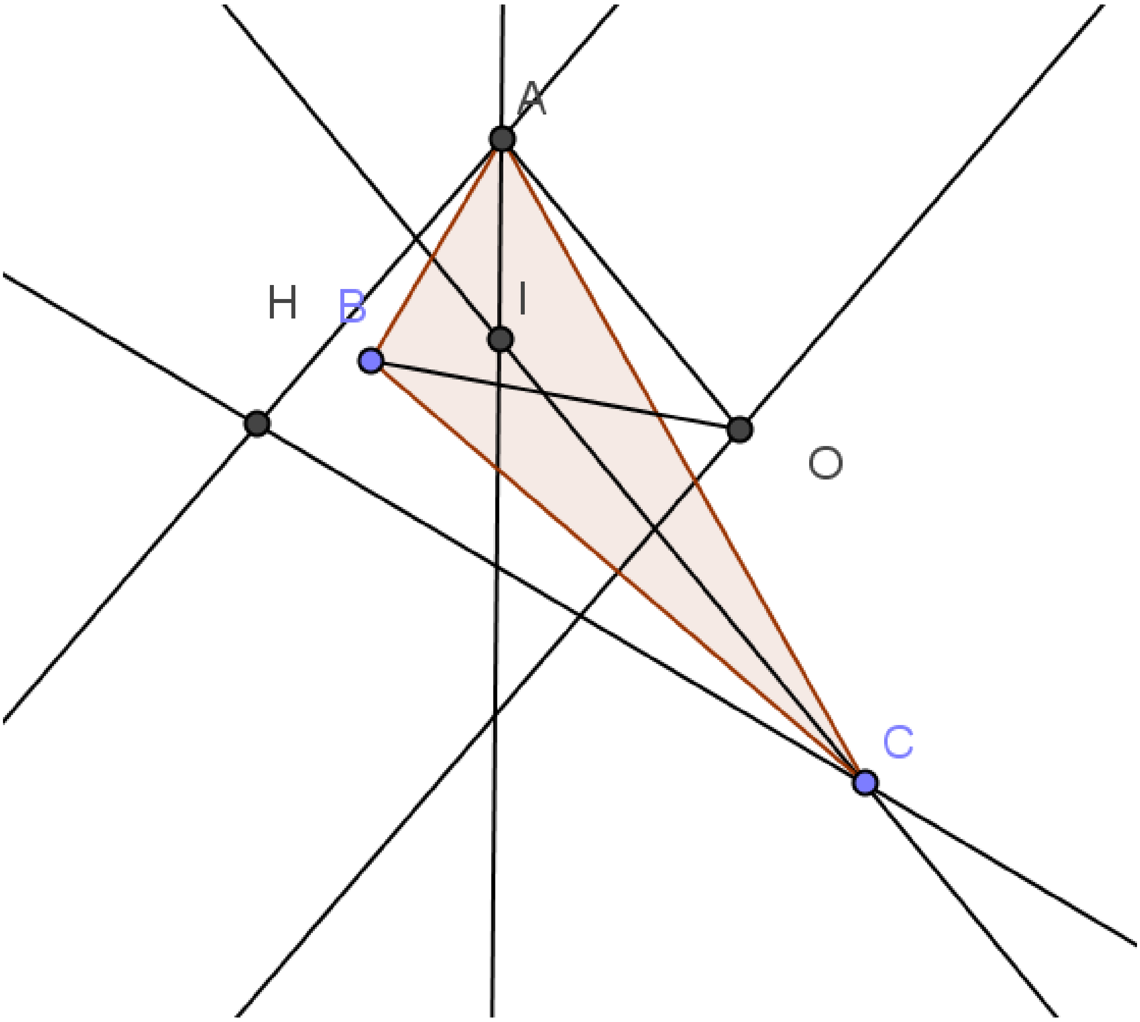
Así pues ambos triángulos son congruentes, y AH=AO: De ahí tenemos lo pedido.

Si el triángulo es rectángulo, habrá de serlo en B, ya que AB<AC.

En tal caso H=B, y O = B', y el triángulo ABB' es equilátero, de donde se concluye lo pedido.




En caso de ser obtusángulo, habrá de serlo en B.




Sean ahora $\alpha=60º$ el ángulo en A, $\beta$ el ángulo en B, y $120º-\beta$ el ángulo en C.

Observemos el ángulo <BIC: Es $<IBC=\beta/2$, $<ICB=60º-\beta/2$, $<BIC=120º$

Ahora tenemos que por ser BOC el ángulo central de BAC, en la circunferencia circunscrita, es $<BOC=120º$

El ortocentro H en este caso está situado en la semirrecta contraria a O respecto a BC.

Si la perpendicular a BC por A corta a la recta BC en $H_a$ , será $AH_a=AB'$ y tenemos que el triángulo $CH_aA$ es tal que tiene de ángulos $120º-\beta$, $90º$, $\beta-30º$, con lo que $<HAB= <H_aAC-BAC=\beta-30º-60º=\beta-90º$

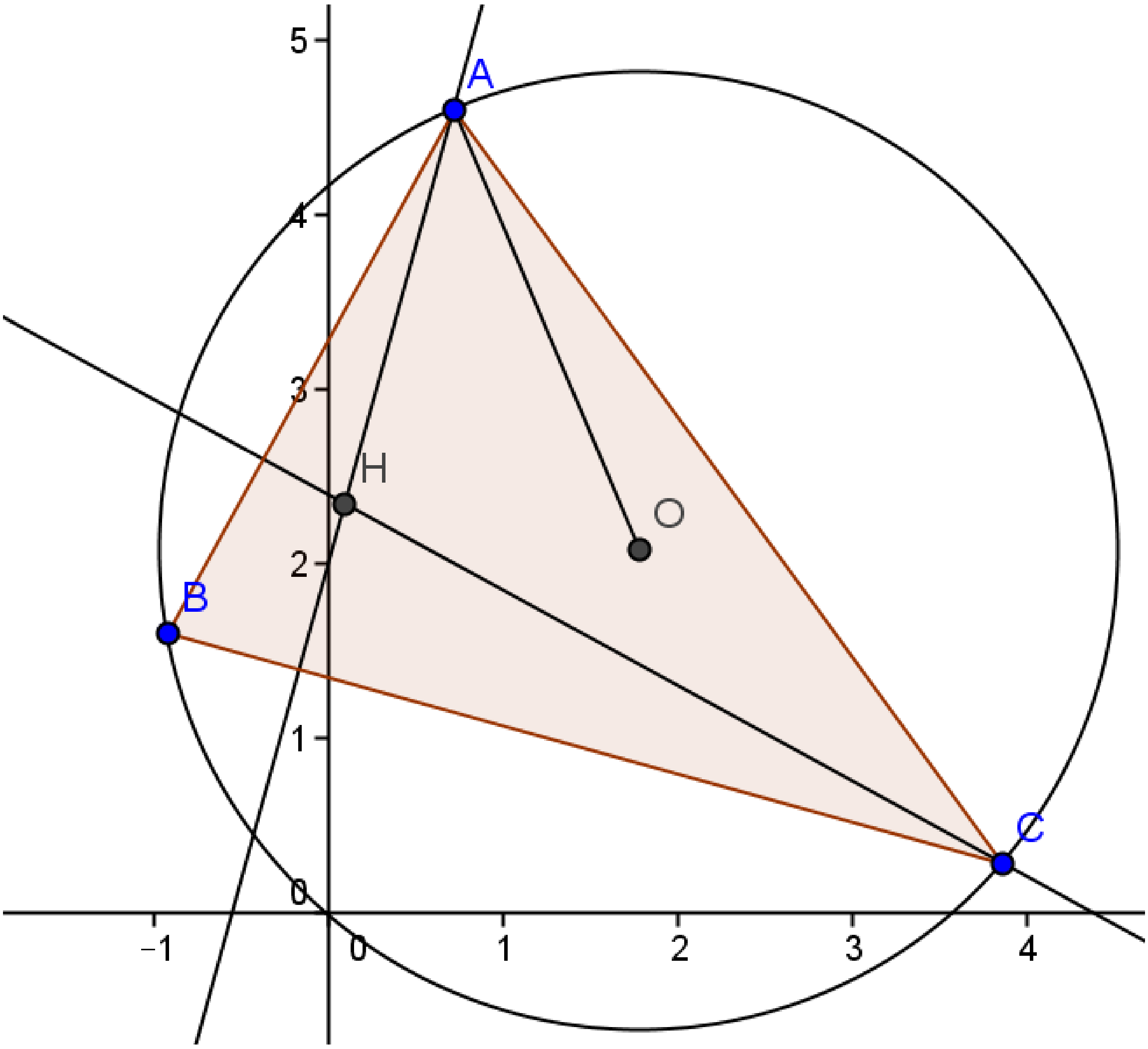
Por otra parte al ser O el circuncentro de ABC con B obtuso, la medida menor del ángulo AOC es $360º-2\beta$, y si B' es el punto medio de AC, el triángulo OB'A tiene de ángulos

$90º$, $180º-\beta$, $\beta-90º$

Así los triángulos $AH_aH$ y AB' O son congruentes con lo que AHO es isósceles. Así al ser AI bisectriz de ABC, lo será de AHO, y, c.q.d. es también mediatriz de AHO.

Ahora supongamos que AI es mediatriz de OH

Supongamos que el triángulo es acutángulo.




El ser AI mediatriz de OH implica que el triángulo AOH es isósceles en A, lo que significa que AO=AH.

Sean α, β, γ los correspondientes ángulos de ABC.

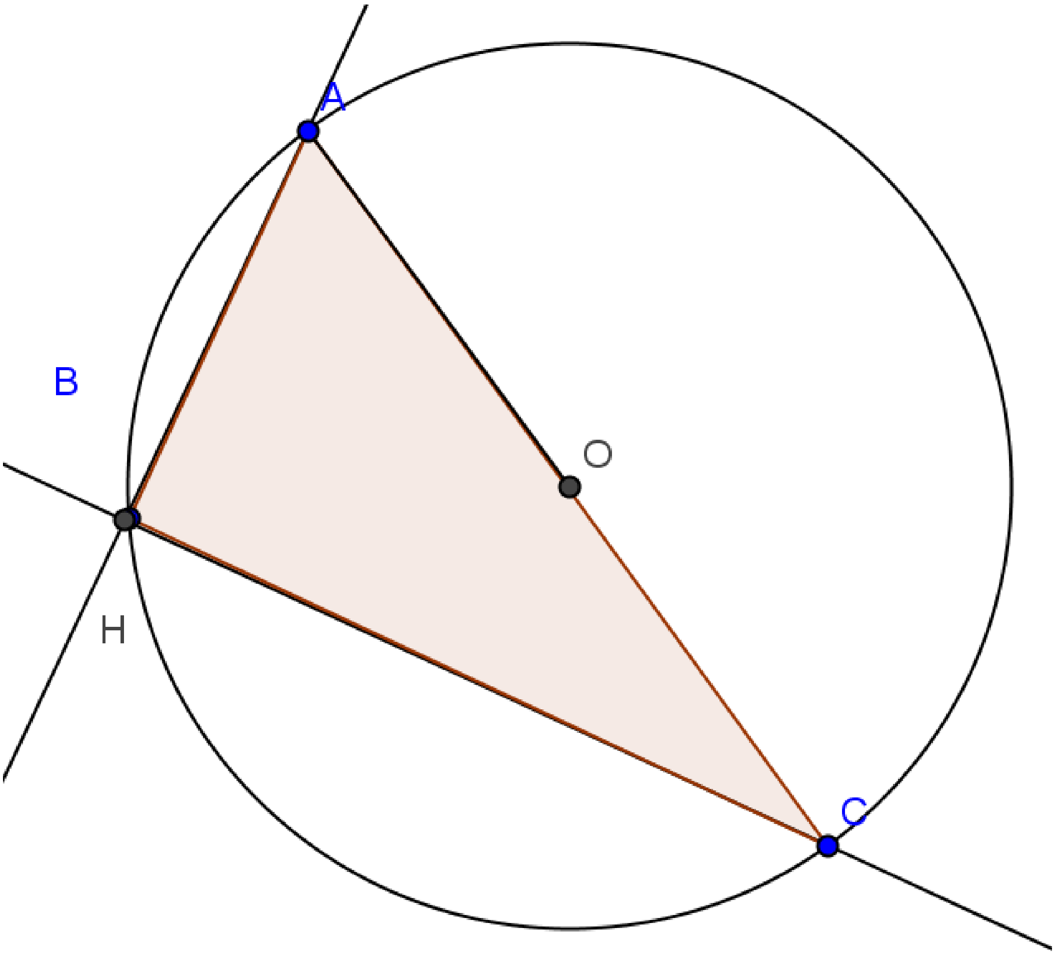
Sea C’ el punto medio de AB.  El triángulo AOC’ es 90º-γ, 90º,γ, por lo que $AO = \frac{c}{2sen\,\gamma}$

Por otra parte, sea $H_b$ el pie de la altura trazada desde el vértice B a AC. Es $AH_b = c\cos\alpha$

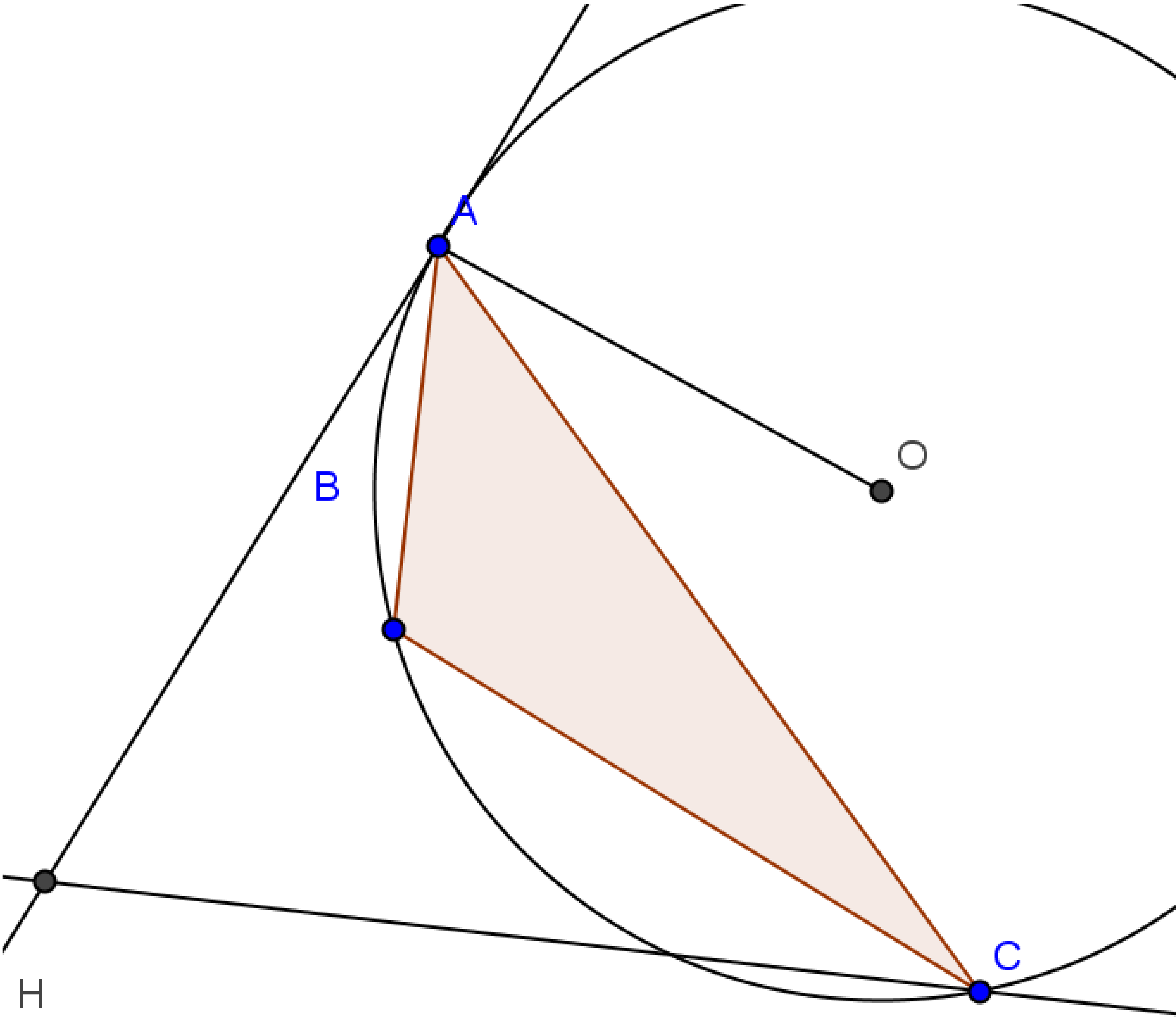
Así tenemos $AH = \frac{c\cos\alpha}{sen\,\gamma}$.

Al ser AO=AH, nos queda $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, de donde α=60º, cqd.

Si el triángulo es rectángulo , habrá de serlo en B, y al ser AO=AH es O=B’, H=B, ABB’ será equilátero, y por tanto α=60º




Si es obtusángulo , habrá de ser B el ángulo obtuso, y se obtiene, igualmente que $AO = \frac{c}{2\,sen\,\gamma}$.




$AH = \frac{c \cos \alpha}{sen\ \gamma}$.

Y se llega a la misma conclusión.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado.Sevilla.