

Problema 747.

Siga $\triangle ABC$ un triangle amb $\overline{AB} < \overline{AC}$. Siguen I l' incentre, O el circumcentre i H l' ortocentre.

La recta AI és mediatriu de $\overline{OH}$ si i només si $A = 60^\circ$.

Solució de Ricard Peiró i Estruch:

Siga R el radi de la circumferència inscrita.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R.$$

$$\angle CAH = 90^\circ - C, \angle ACH = 90^\circ - A:$$

$$\text{Aleshores, } \angle AHC = A + C = 180^\circ - B.$$

$$\angle AOB = 2B, \text{ aleshores, } \angle CAO = 90^\circ - B.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AHC$:

$$\frac{\overline{AH}}{\cos A} = \frac{b}{\sin B} = 2R.$$

($\Rightarrow$)

La recta AI és mediatriu de $\overline{OH}$, aleshores, $\overline{AO} = \overline{AH} = R$.

$$\frac{R}{\cos A} = 2R. \text{ Aleshores, } \cos A = \frac{1}{2}. \text{ Per tant, } A = 60^\circ.$$

($\Leftarrow$)

Suposem $A = 60^\circ$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AHC$:

$$\frac{\overline{AH}}{\cos 60^\circ} = \frac{b}{\sin B} = 2R. \text{ Aleshores, } \overline{AH} = R.$$

$$\angle OAI = \angle CAI - \angle CAO = 30^\circ - (90^\circ - B) = B - 60^\circ.$$

$$\angle HAI = \angle BAI - \angle BAH = 30^\circ - (90^\circ - B) = B - 60^\circ.$$

Aleshores, AI és bisectriu del triangle isòsceles, $\triangle AOH$.

Per tant, AI és mediatriu del segment $\overline{OH}$.

