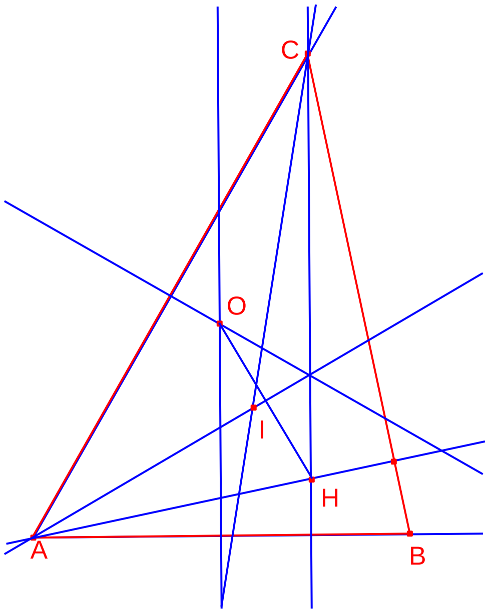
Problema 747.

Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ un triángulo con $\overline{AB} < \overline{AC}$. Sean I el incentro, O el circumcentro y H el ortocentro.

La recta AI es mediatriz de $\overline{OH}$ si y sólo si $A = 60^{\circ}$.

Solución de Ricard Peiró i Estruch:

Siga R el radi de la circunferencia inscrita.



Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R.$$

$\angle CAH = 90^{\circ} - C$, $\angle ACH = 90^{\circ} - A$:

Entonces, $\angle AHC = A + C = 180^{\circ} - B$.

$\angle AOB = 2B$, entonces, $\angle CAO = 90^{\circ} - B$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{AHC}$:

$$\frac{\overline{AH}}{\cos A} = \frac{b}{\sin B} = 2R.$$

$(\Rightarrow)$

La recta AI es mediatriz de $\overline{OH}$, entonces, $\overline{AO} = \overline{AH} = R$.

$\frac{R}{\cos A} = 2R$. Entonces, $\cos A = \frac{1}{2}$. Por tanto, $A = 60^{\circ}$.

$(\Leftarrow)$

Supongamos que $A = 60^{\circ}$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{AHC}$:

$\frac{\overline{AH}}{\cos 60^{\circ}} = \frac{b}{\sin B} = 2R$. Entonces, $\overline{AH} = R$.

$\angle OAI = \angle CAI - \angle CAO = 30^{\circ} - (90^{\circ} - B) = B - 60^{\circ}$.

$\angle HAI = \angle BAI - \angle BAH = 30^{\circ} - (90^{\circ} - B) = B - 60^{\circ}$.

Entonces, AI es bisectriz del triángulo isósceles, $\overset{\Delta}{AOH}$.

Por tanto, AI es mediatriz del segmente $\overline{OH}$.