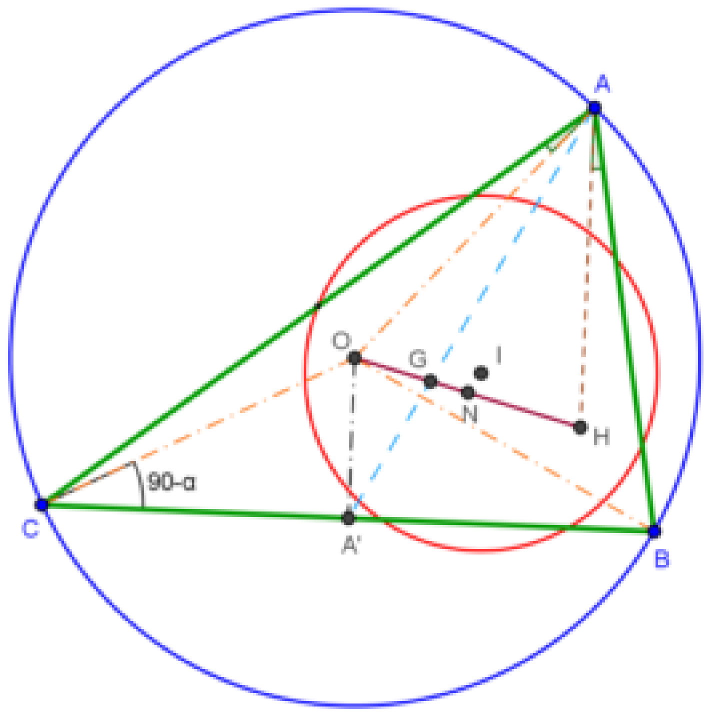
Problema *747. Sobre un ángulo de 60º(I).*

Sea ABC un triángulo con $AB < AC$. Sean I el incentro, O el circuncentro y H el ortocentro.

La recta AI es mediatriz de OH si y sólo si $\measuredangle A = 60°$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



En cualquier triángulo la distancia del ortocentro H a un vértice es el doble de la distancia del circuncentro O al lado opuesto a ese vértice. En efecto: si G es el baricentro y A' el punto medio de BC, los triángulos $OA'G$ y HAG son semejantes (una homotecia de centro G y razón -2 transforma el primero en el segundo), debido a la posición del baricentro en la mediana y en la recta de Euler. Por tanto $AH = 2OA'$.

En el triángulo rectángulo $OA'C$ tenemos $OA' = R \cdot \cos\alpha$.

Si A pertenece a la mediatriz de OH, $AH = OA = R = 2OA' = 2 \cdot R \cdot \cos\alpha$. De ahí se deduce que $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ y por tanto $\alpha = 60°$.

Si A está en la mediatriz de OH, el triángulo AOH es isósceles y la bisectriz de A coincide con su mediatriz. Como O y H son conjugados isogonales, la bisectriz AI del ángulo A es también la del ángulo OAH, y en consecuencia, I también está en la mediatriz de OH como queríamos demostrar. ■