Problema 748 de *triánguloscabri*. *Sean D el punto medio del arco BC que no contiene a A, A' el punto diametralmente opuesto a A y M el punto medio de BC. La perpendicular por M a AD corta a OA' en su punto medio si y solo si $A = 60°$.*

Propuesto por Philippe Fondanaiche

Solución de *Francisco Javier García Capitán*. En el enunciado podemos sustituir D por el incentro I, ya que AD es la bisectriz interior del ángulo A. Usemos coordenadas baricéntricas. Una perpendicular a AI es la recta I_bI_c que une los excentros, con ecuación $cy + bz = 0$ y punto del infinito $J = (b-c : -b : c)$. La paralela a I_bI_c que pasa por el punto medio $M = (0 : 1 : 1)$ de BC es $(b+c)x+(b-c)(y-z) = 0$. Por otro lado $O = (a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$ y la recta AO tiene ecuación $c^2S_Cy-b^2S_Bz = 0$. Las dos rectas se cortan en el punto $Q = ((b-c)^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$. Usando la identidad

$$(b-c)^2S_A + b^2S_B + c^2S_C = 2bc(a-b+c)(a+b-c)$$

y la relación

$$\begin{aligned} &2S_A(a-b+c)(a+b-c)(1,0,0) + ((b-c)^2S_A, b^2S_B, c^2S_C) \\ =&(a^2S_A, b^2S_B, c^2S_C) \end{aligned}$$

podemos deducir que O divide al segmento AQ en la razón

$$\lambda = \frac{2bc}{b^2+c^2-a^2}.$$

Q es el punto medio de OA' si y solo si $\lambda = 2$, lo cual es equivalente a que $\cos A = \frac{1}{2}$, es decir $A = 60°$.