

Problema 748.

Siga $\triangle ABC$ un triangle amb $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Siga D el punt mig de l'arc $\widehat{BC}$ que no conté a A.

Siga A' el punt diametralment oposat a A, respecte de la circumferència circumscrita.

Siga A_4 el punt mig del costat $\overline{BC}$.

La recta perpendicular a AD que passa per A_4 talla a OA' en el punt mig si i només si $A = 60^\circ$.

Solució de Ricard Peiró:

Siga R el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\triangle ABC$.

Siga O el circumcentre.

Siga P la intersecció de la recta perpendicular a AD que passa per A_4 i OA'.

($\Rightarrow$)

Suposem que $\overline{OP} = \overline{PA'}$.

$\angle A'DA = 90^\circ$, A_4P és perpendicular a AD, Aleshores:

Els segments $\overline{AD}$, $\overline{A_4P}$ són paral·lels

Els triangles $\triangle ODA'$, $\triangle OA_4P$ són semblants i de raó 2:1.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{OA_4} = \overline{A_4D}.$$

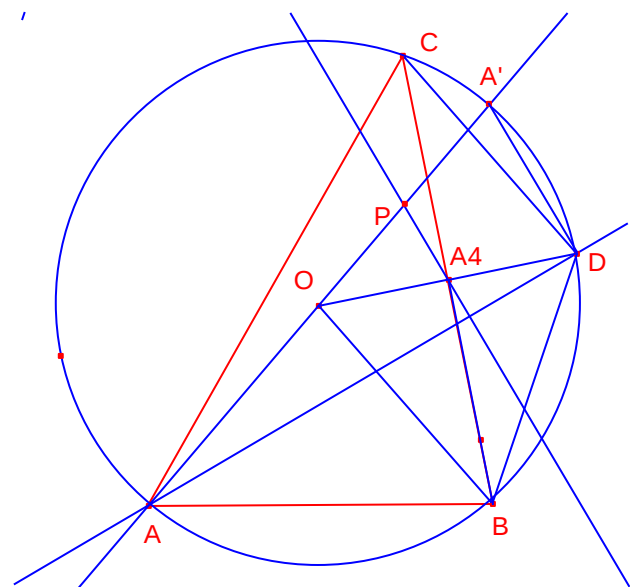
$$\overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = R.$$

Aleshores, els triangles $\triangle OA_4C$, $\triangle OA_4B$ són iguals..

Aleshores, $\angle CA_4O = 90^\circ$.

Aleshores, els triangles $\triangle COD$, $\triangle BOD$ són equilàters.

Aleshores, $\angle COB = 120^\circ$, aleshores, $A = 60^\circ$.



($\Leftarrow$)

Suposem $A = 60^\circ$.

$$\angle COD = \angle DOB = 60^\circ.$$

$\overline{OC} = \overline{OD} = R$, aleshores, els triangles $\triangle COD$, $\triangle BOD$ són equilàters.

Aleshores, OBDC és un rombe.

$\angle A'DA = 90^\circ$, A_4P és perpendicular a AD, Aleshores:

Els segments $\overline{AD}$, $\overline{A_4P}$ són paral·lels

Per tant, A_4 és el punt mig de la diagonal $\overline{OD}$.

Els triangles $\triangle ODA'$, $\triangle OA_4P$ són semblants i de raó 2:1. Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{OP} = \overline{PA'}.$$