

Problema 748.

Sea $\triangle ABC$ un triángulo con $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Sea D el punto medio de el arco $\widehat{BC}$ que no contiene a A.

Sea A' el punto diametralmente opuesto a A, respecto de la circunferencia circunscrita.

Sea A_4 el punto medio del lado $\overline{BC}$.

La recta perpendicular a AD que pasa por A_4 corta a OA' en el punto medio si y sólo si $A = 60^\circ$.

Solución de Ricard Peiró:

Sea R el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$.

Sea O el circuncentro.

Sea P la intersección de la recta perpendicular a AD que pasa por A_4 y OA' .

($\Rightarrow$)

Supongamos que $\overline{OP} = \overline{PA'}$.

$\angle A'DA = 90^\circ$, A_4P es perpendicular a AD, Entonces:

Los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{A_4P}$ son paralelos

Los triángulos $\triangle ODA'$, $\triangle OA_4P$ son semejantes y de razón 2:1. Aplicando el teorema de Tales:

$$\overline{OA_4} = \overline{A_4D}.$$

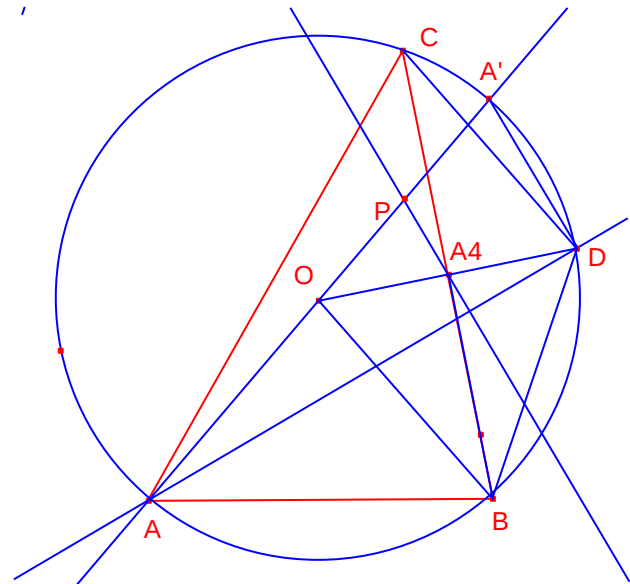
$$\overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD} = R.$$

Entonces, los triángulos $\triangle OA_4C$, $\triangle OA_4B$ son iguales..

Entonces, $\angle CA_4O = 90^\circ$.

Entonces, los triángulos $\triangle COD$, $\triangle BOD$ son equiláteros.

Entonces, $\angle COB = 120^\circ$, entonces, $A = 60^\circ$.



($\Leftarrow$)

Supongamos que $A = 60^\circ$.

$$\angle COD = \angle DOB = 60^\circ.$$

$\overline{OC} = \overline{OD} = R$, entonces, los triángulos $\triangle COD$, $\triangle BOD$ son equiláteros.

Entonces, OBDC es un rombo.

$\angle A'DA = 90^\circ$, A_4P es perpendicular a AD, Entonces:

Los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{A_4P}$ son paralelos

Por tanto, A_4 es el punto medio de la diagonal $\overline{OD}$.

Los triángulos $\triangle ODA'$, $\triangle OA_4P$ son semejantes y de razón 2:1. Aplicando el teorema de Tales:

$$\overline{OP} = \overline{PA'}.$$