

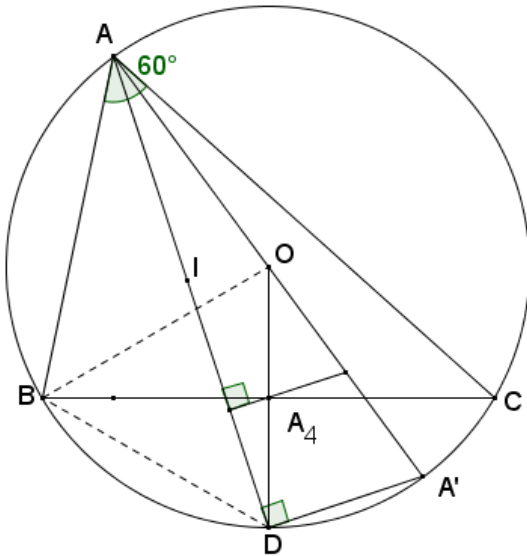
Problema 748

Sea ABC un triángulo con $AB < AC$. Sea D el punto medio del arco BC que no contiene a A . Sea A' el punto diametralmente opuesto a A . Sea A_4 el punto medio del lado BC . La recta perpendicular a AD por A_4 corta a OA' en su punto medio si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Si l'angle $\angle BAC = 60^\circ$, alors la perpendiculaire à la bissectrice de l'angle en A passant par le milieu du côté BC coupe OA' en son milieu.

Démonstration



La bissectrice AI de l'angle $\angle BAC$ coupe le cercle circonscrit au triangle ABC au milieu D de l'arc BC qui ne contient pas A . D'autre part AA' étant diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC , on a $\angle ADA' = 90^\circ$.

Si $\angle BAC = 60^\circ$, alors $\angle BOC = 2\angle BAC = 120^\circ = 180^\circ - \angle BAC = \angle BDC$ et le triangle OBD est équilatéral. Le point A_4 est en même temps milieu du côté BC et du segment OD . Comme l'angle $\angle ADA'$ est droit, la perpendiculaire menée de A_4 à AD est parallèle à DA' et comme A_4 est milieu de OD , elle partage le segment OA' en son milieu.

Réciproquement, si la perpendiculaire à la bissectrice de l'angle en A passant par le milieu du côté BC coupe OA' en son milieu, alors $\angle BAC = 60^\circ$

Démonstration

La perpendiculaire à la bissectrice de l'angle en A étant parallèle à DA' , coupe OD en son milieu. On en déduit que D est symétrique de O par rapport au côté BC . $\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC = \angle BOC = 2\angle BAC$. D'où $\angle BAC = 60^\circ$.