

Problema 749.-

Sobre un ángulo de 60° (III)

Sea ABC un triángulo con $AB < AC$. Sean O el circuncentro e I el incentro. Sean $A_1B_1C_1$ los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con BC , AC y AB .

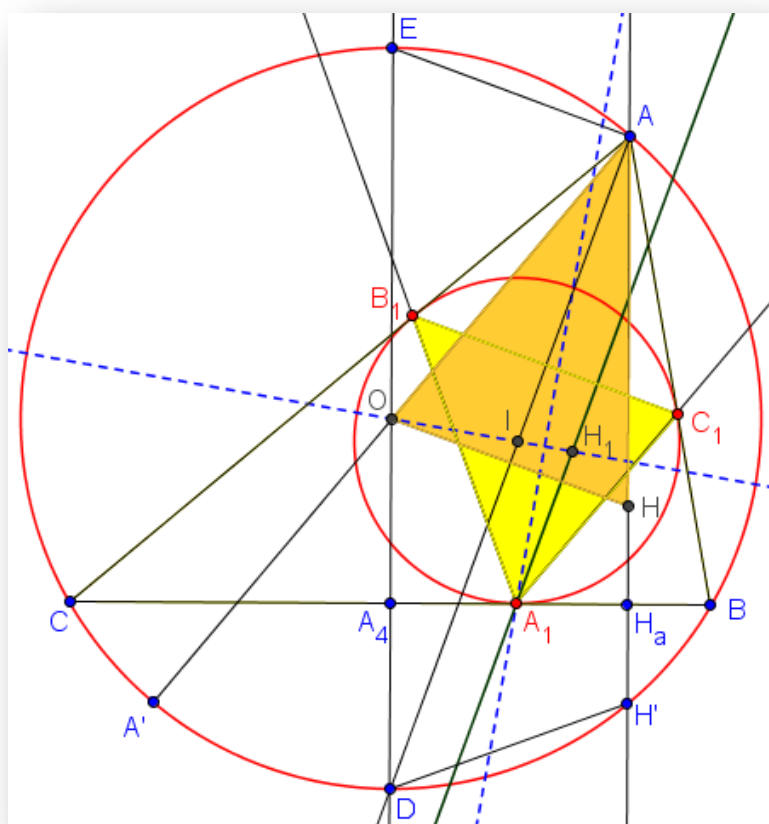
La bisectriz de $\angle B_1A_1C_1$ es perpendicular a OI si y sólo si $\angle A = 60^\circ$ si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Dem.-

Si realizamos la construcción indicada, podemos observar los siguientes hechos de interés:



Tenemos la equivalencia siguiente: $\angle A = 60^\circ$ si y sólo si $\angle A_1 = 60^\circ$.

Por tanto, según el problema 747, la recta AI es mediatriz de OH si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

En nuestro caso, y considerando ahora el triángulo $A_1B_1C_1$ y, si consideramos J_1 su incentro y H_1 su ortocentro, entonces $\angle A_1 = 60^\circ$ si y sólo si la recta A_1J_1 será mediatriz de IH_1 , ya que el circuncentro del triángulo $A_1B_1C_1$ es el propio punto I .

El ortocentro H_1 deberá estar sobre la altura trazada por el vértice A . Por tanto, esta altura será la paralela a AI , trazada por A_1 . De esta forma, el punto H_1 deberá estar sobre la recta OI y así se tendrá que $A_1H_1 = r$, radio de la inscrita. Por tanto, se verifica que $A_1I = A_1H_1$. Y esto sólo es posible si y sólo si $\angle A_1 = 60^\circ$, como ya se demostró en el Problema 747.

Así concluimos de igual forma que:

“La bisectriz de $\angle B_1A_1C_1$ es perpendicular a OI si y sólo si $\angle A = 60^\circ$ ”