Problema 749 de *triánguloscabri*. *Sea ABC un triángulo con $AB < AC$ y A', B', C' los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con los lados BC, CA, AB. Demostrar que la bisectriz del ángulo $B'A'C'$ es perpendicular a OI si y solo si $A = 60°$.*

Propuesto por Philippe Fondanaiche

Solución de *Francisco Javier García Capitán*. En cualquier triángulo tenemos $AB' = AC' = s - a$. Por el teorema del coseno,

$$B'C'^2 = 2(s-a)^2(1-\cos A) = \frac{(a-b-c)^2(a+b-c)(a-b+c)}{4bc},$$

con fórmulas parecidas para $C'A'$ y $A'B'$. Entonces, si $t = A'B' : A'C'$ podemos obtener

$$t^2 = \frac{A'B'^2}{A'C'^2} = \frac{c(a+b-c)}{b(a-b+c)}. \tag{1}$$

Ahora, en coordenadas baricéntricas tenemos $B' = (s-c : 0 : s-a)$ y $C' = (s-b : s-a : 0)$. Sea J el punto que divide al segmento $B'C'$ en la razón $-t : 1$. Por el teorema de la bisectriz, $A'J$ será la bisectriz exterior del ángulo $B'A'C'$.

Se puede calcular

$$J = (c(a+b-c) - (a-b+c)bt : -b(b+c-a)t : c(b+c-a))$$

La recta $A'J$ es paralela a OI si y solo si

$$t = -\frac{a+b-2c}{a-2b+c}. \tag{2}$$

Eliminando t de (1) y (2) obtenemos la expresión

$$(b-c)(a+b+c)(a^2-b^2+bc-c^2) = 0,$$

que corresponde a $AB = AC$ o $A = 60°$.