

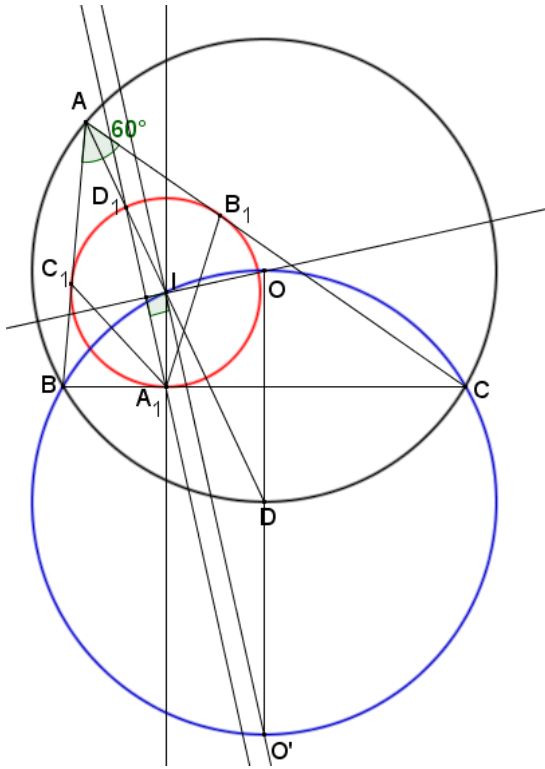
Problema 749

Sea ABC un triángulo con $AB < AC$. Sean O el circuncentro e I el incentro. Sean $A_1 B_1 C_1$ los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con BC , AC y AB . La bisectriz de $\angle B_1 A_1 C_1$ es perpendicular a OI si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Si l'angle $\angle BAC = 60^\circ$, alors la droite OI est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $\angle B_1 A_1 C_1$

Démonstration



La bissectrice de l'angle $\angle BAC$ rencontre le cercle circonscrit au triangle ABC au point D qui est le milieu de l'arc BC qui ne contient pas A tandis que la bissectrice de l'angle $\angle B_1 A_1 C_1$ rencontre le cercle inscrit du triangle ABC au point D_1 qui est le milieu de l'arc $B_1 C_1$ qui ne contient pas A_1 .

Soit O' le point symétrique du centre O du cercle circonscrit au triangle ABC par rapport à D .

Si $\angle BAC = 60^\circ$, alors $\angle BIC = 90^\circ + \angle BAC/2 = 120^\circ = 2 \angle BAC = \angle BOC$. Les quatre points B, I, O et C sont cocycliques.

Le triangle DBI est isocèle car $\angle DBI = \angle DBC + \angle CBI = (\angle BAC + \angle CBA)/2$ et $\angle DIB = \angle ABI + \angle BAI = (\angle BAC + \angle CBA)/2$. Donc $DB = DI$. Les points B, I, O et C sont sur le cercle de centre D et de rayon DI .

Il en résulte $\angle A_1 I O' = \angle I O' D = \angle O' I D = \angle D_1 A_1 I$ et la droite IO' est parallèle à $A_1 D_1$. Dans le cercle circonscrit au quadrilatère $BIOC$, OO' est un diamètre et $\angle O'IO = 90^\circ$. La droite OI est donc perpendiculaire à la droite $A_1 D_1$ parallèle à $O'I$.

Réciproquement si la droite OI est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $\angle B_1 A_1 C_1$, alors $\angle BAC = 60^\circ$.

On a les relations d'angles : $\angle A_1 I O' = \angle I O' O = \angle O' I O$.

D'où $2 \angle A_1 I O' = \angle A_1 I D = 2 \angle D_1 A_1 I$ soit $\angle A_1 I O' = \angle D_1 A_1 I$, ce qui entraîne IO' parallèle à $A_1 D_1$.

La droite OI est alors perpendiculaire à IO' et le point I appartient au cercle circonscrit au quadrilatère $BOCO'$. Il en résulte $90^\circ + \angle BAC/2 = \angle BIC = \angle BOC = 2 \angle BAC$, soit $\angle BAC = 60^\circ$.