

Problema 749

Sobre un ángulo de 60º(III)

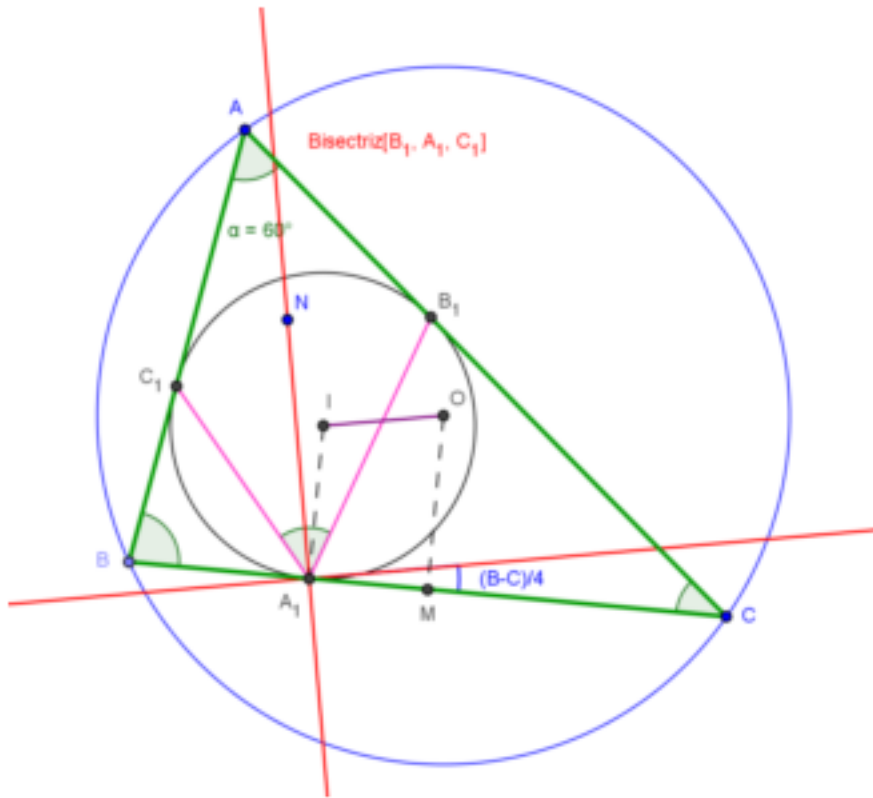
Sea ABC un triángulo con $AB < AC$. Sean O el circuncentro e I el incentro.

Sean A_1, B_1, C_1 los puntos de contacto de la circunferencia inscrita con BC, AC y AB .

La bisectriz de $\angle B_1A_1C_1$ es perpendicular a OI si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Supondremos unos ejes de coordenadas centrados en A_1 , con BC como eje de abscisas y A_1I de ordenadas. M es el punto medio de BC , R y r los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita respectivamente. De este modo tenemos $I = (0, r)$; $O = (A_1M, OM)$. La recta que pasa por ellos es la de ecuación

$$r_{IO}: y - r = \frac{OM-r}{A_1M}x.$$

Vamos hallar, en primer lugar, la pendiente de la bisectriz del ángulo $\varphi = \angle B_1A_1C_1$.

En el triángulo isósceles CA_1B_1 los ángulos iguales miden $90 - \frac{C}{2}$. El ángulo φ mide $90 - \frac{A}{2}$, por eso para $\theta = \angle NA_1C$ tendremos:

$$\theta = 90 - \frac{C}{2} + 45 - \frac{A}{4} = 135 - \frac{C}{2} - \frac{180-B-C}{4} = 90 + \frac{B-C}{4}.$$

La bisectriz exterior, perpendicular a ésta, tendrá por pendiente $\tan \frac{B-C}{4}$.

Este valor ha de ser también el de la pendiente de la recta r_{IO} . Calculemos esa pendiente.

$$A_1M = BM - BA_1 = \frac{a}{2} - (s - b) = \frac{b-c}{2} = R(\text{sen } B - \text{sen } C); OM - r = R \cdot \cos A - r.$$

La pendiente de la recta definida por I y O es pues $\frac{OM-r}{A_1M} = \frac{R \cdot \cos A - r}{R(\text{sen } B - \text{sen } C)}$.

Vamos a intentar conseguir una expresión más manejable en la que sólo intervengan los ángulos del triángulo ABC y así poder compararla con la obtenida para la bisectriz exterior de φ .

Una de las varias expresiones que ligan los diferentes elementos de un triángulo es

$$r = 4R \cdot \text{sen } \frac{A}{2} \cdot \text{sen } \frac{B}{2} \cdot \text{sen } \frac{C}{2}$$

Con ella $R \cdot \cos A - r = R \left(\cos A - 4 \cdot \text{sen } \frac{A}{2} \cdot \text{sen } \frac{B}{2} \cdot \text{sen } \frac{C}{2} \right)$. Usaremos $\text{sen } \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}$ para los ángulos de un triángulo cualquiera y otras identidades trigonométricas.

$$\begin{aligned} \cos A - 4 \cdot \text{sen } \frac{A}{2} \cdot \text{sen } \frac{B}{2} \cdot \text{sen } \frac{C}{2} &= \cos A + 2 \cdot \text{sen } \frac{A}{2} \cdot \left(-2 \cdot \text{sen } \frac{B}{2} \cdot \text{sen } \frac{C}{2} \right) \\ &= 1 - 2 \cdot \left(\text{sen } \frac{A}{2} \right)^2 + 2 \cdot \text{sen } \frac{A}{2} \cdot \left(\cos \frac{B+C}{2} - \cos \frac{B-C}{2} \right) \\ &= 1 - 2 \cdot \left(\text{sen } \frac{A}{2} \right)^2 + 2 \cdot \text{sen } \frac{A}{2} \cdot \left(\text{sen } \frac{A}{2} - \cos \frac{B-C}{2} \right) \\ &= 1 - 2 \cdot \text{sen } \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} = 1 - 2 \cdot \cos \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} \\ &= 1 - \cos B - \cos C \end{aligned}$$

Con este cálculo sumamente laborioso obtenemos la expresión más sencilla de la pendiente de IO en función de los ángulos del triángulo:

$$\text{pend}(IO) = \frac{1-\cos B-\cos C}{\text{sen } B-\text{sen } C}.$$

Ahora buscamos soluciones para la ecuación trigonométrica

$$\frac{1-\cos B-\cos C}{\text{sen } B-\text{sen } C} = \tan \frac{B-C}{4}.$$

De $\tan \frac{B-C}{4} = \frac{1-\cos \frac{B-C}{2}}{\text{sen } \frac{B-C}{2}}$ y $\text{sen } B - \text{sen } C = 2 \cdot \text{sen } \frac{B-C}{2} \cdot \cos \frac{B+C}{2}$ suprimiendo denominadores llegamos a

$$1 - \cos B - \cos C = 2 \cdot \cos \frac{B+C}{2} \cdot \left(1 - \cos \frac{B-C}{2} \right)$$

Usando ahora $\cos B + \cos C = 2 \cdot \cos \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2}$,

$$1 - 2 \cdot \cos \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} = 2 \cdot \cos \frac{B+C}{2} \cdot \left(1 - \cos \frac{B-C}{2} \right)$$

y simplificando

1 = 2 \cdot \cos \frac{B+C}{2}

O de forma equivalente $1 = 2 \text{sen } \frac{A}{2}$, de donde resulta, $A = 60^\circ$. ■