Problema 750.-
Sobre un ángulo de 60º (IV)

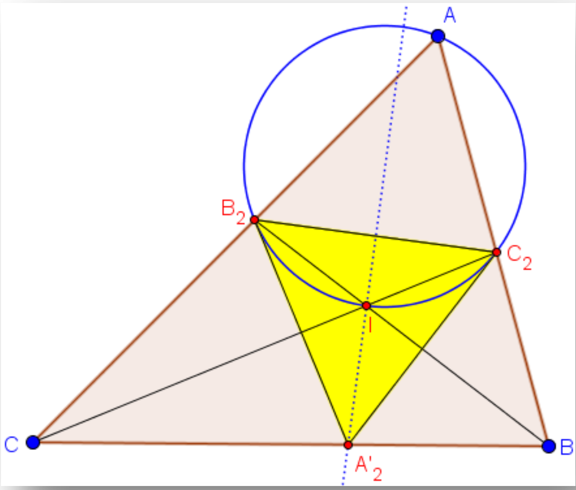
Sea ABC un triángulo con AB<AC. Sean B_2, C_2 los pies de las bisectrices de los ángulos B y C sobre los lados AC y AB. Sea A'_2 la intersección de la mediatriz de B_2C_2 con BC. El triángulo $A'_2B_2C_2$ es equilátero si y sólo si <A=60º.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

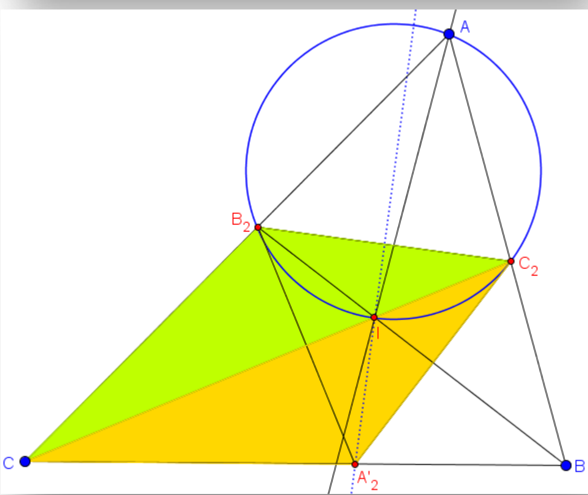
Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Dem.-
Si realizamos la construcción indicada, podemos observar que el punto I donde se cortan las bisectrices BB_2 y CC_2 es el incentro del triángulo ABC.

⇒ **Supongamos que $\measuredangle \mathbf{BAC} = \mathbf{60º}$.**
Entonces los ángulos $\measuredangle BB_2A = 120º - \frac{B}{2}$ y $\measuredangle CC_2A = 120º - \frac{C}{2} \rightarrow \measuredangle IB_2A + \measuredangle IC_2A = 180º$.
Por tanto, el ángulo $\measuredangle B_2IC_2 = 120º$.
De esta forma, el cuadrilátero IB_2AC_2 es inscriptible y la mediatriz del lado B_2C_2 en el triángulo AB_2C_2 cortará a la bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$ en dicho punto I.



Por tanto, como $\measuredangle IB_2C_2 = \measuredangle IAC_2 = \measuredangle IC_2B_2 = 30º$ y los ángulos en $\measuredangle A'_2B_2C_2 = \measuredangle A'_2C_2B_2$ han de ser iguales, también lo serán los ángulos $\measuredangle IB_2A'_2 = \measuredangle IC_2A'_2 = \alpha$.
En definitiva, como $\measuredangle IA'_2B_2 = \measuredangle IA'_2C_2 = 60º - \alpha$, sucederá que $\measuredangle B_2IC_2 = \measuredangle C_2IB_2 = 120º$ y esto sólo ocurre si y sólo si el triángulo **$A'_2B_2C_2$ es equilátero.**



⇒ **Supongamos que triángulo $A'_2B_2C_2$ es equilátero.**
Sea la circunferencia que circunscribe al triángulo $A_2B_2C_2$.
Entonces los triángulos $CC_2A'_2$ y CB_2C_2 son iguales por tener iguales un ángulo, $\measuredangle C/2$ y dos lados, CC_2 y $C_2A'_2 (= B_2C_2)$.

Por tanto, los ángulos
$\measuredangle CC_2B_2 = \measuredangle CC_2A'_2$ *son iguales entre sí.*

En definitiva, $\measuredangle CC_2B_2 = \measuredangle CC_2A'_2 = 30º$.

De la misma forma, probaríamos que:
$\measuredangle BB_2C_2 = \measuredangle BB_2A'_2 = 30º \rightarrow$ *El triángulo* IB_2C_2 es isósceles.

Por tanto, la mediatriz del lado B_2C_2 pasa por el punto I.

En definitiva, el punto I, intersección de la bisectriz en el ángulo A y la mediatriz del lado B_2C_2 pertenecerá a la circunferencia circunscrita al triángulo AB_2C_2.

En definitiva, como el ángulo en I es de 120º, entonces **el ángulo en A será de 60º.**