

Problema 750

Sobre un ángulo de 60° (IV)

Sea ABC un triángulo con $AB < AC$

Sean B_2, C_2 los pies de las bisectrices de los ángulos B y C sobre los lados AC y AB .

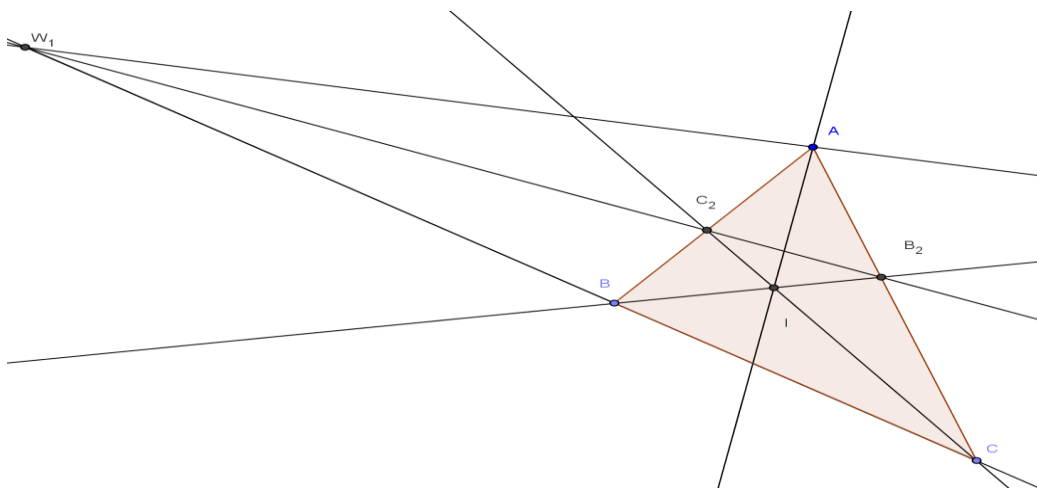
Sea A'_2 la intersección de la mediatriz de B_2C_2 con BC .

El triángulo $A'_2B_2C_2$ es equilátero si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Observación de Philippe: En el 750 el triángulo ABC ha de ser acutángulo (Editado el 19 de Octubre de 2015)

Solución del director.



Consideremos que $\angle A = 60^\circ$, y sea W_1 el punto de corte de la recta C_2B_2 con BC .

Es conocido que $AB_2 = bc/(c+a)$, $B_2C = ba/(c+a)$, $AC_2 = cb/(a+b)$, $C_2B = ca/(a+b)$

Es por el teorema de Menelao, $(W_1B)(AC_2)(B_2C) = (W_1C)(C_2B)(AB_2)$, de donde se tiene que

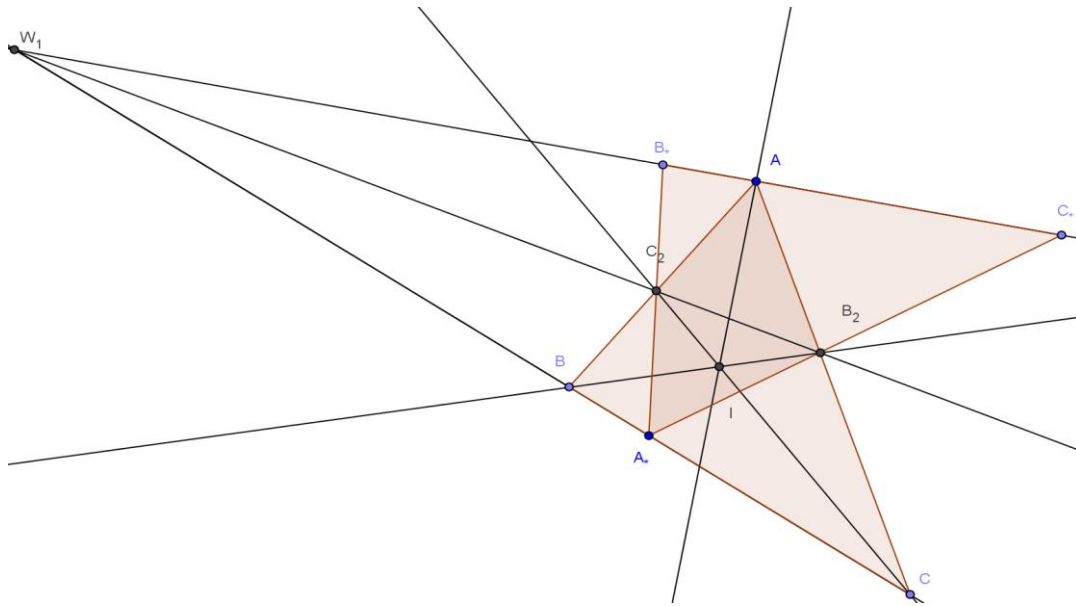
$W_1B = ac/(b-c)$, con lo que W_1 es el pie de la bisectriz exterior del ángulo A .

Observemos el triángulo CAW_1 . CC_2 es la bisectriz del ángulo C . $\angle CAB = 60^\circ$ por la construcción que hemos seguido.

Dado que $\angle W_1AI = 90^\circ$ por ser AW_1 la bisectriz exterior, es $\angle W_1AB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, por lo que C_2 es el incentro de CAW_1 .

Ello implica que la recta $W_1C_2B_2$ es la bisectriz del ángulo AW_1C .

De ahí se tiene que si hacemos una simetría axial del triángulo ABC respecto a B_2C_2 , el triángulo $A^*B^*C^*$ simétrico cumple que A^* pertenece a BC , y A está sobre B^*C^* .



Busquemos el valor del ángulo BW_1A .

Sean los ángulos de ABC 60° , β , $120^\circ - \beta$.

Sea A_2 el pie de la bisectriz del ángulo A sobre BC .

Dado que A_2AW_1 es recto y que $\angle BA_2A = 150^\circ - \beta$, $\angle BW_1A = \beta - 60^\circ$. Así, $\angle C_2W_1A = \angle CW_1C_2 = (\beta/2) - 30^\circ$

Consideremos la circunferencia τ que contiene a A, B_2, C_2 .

Dado que $\angle C_2IB_2 = 120^\circ$, I es de τ .

τ cortará a la recta AW_1 en un punto T . Busquemos el ángulo ATB_2

$\angle ATB_2 = 180^\circ - \angle AC_2B_2 = 180^\circ - (180^\circ - \angle CC_2B_2 - \angle CC_2A) = 180^\circ - (180^\circ - 30^\circ - (120^\circ - (\beta/2))) = 150^\circ - (\beta/2)$.

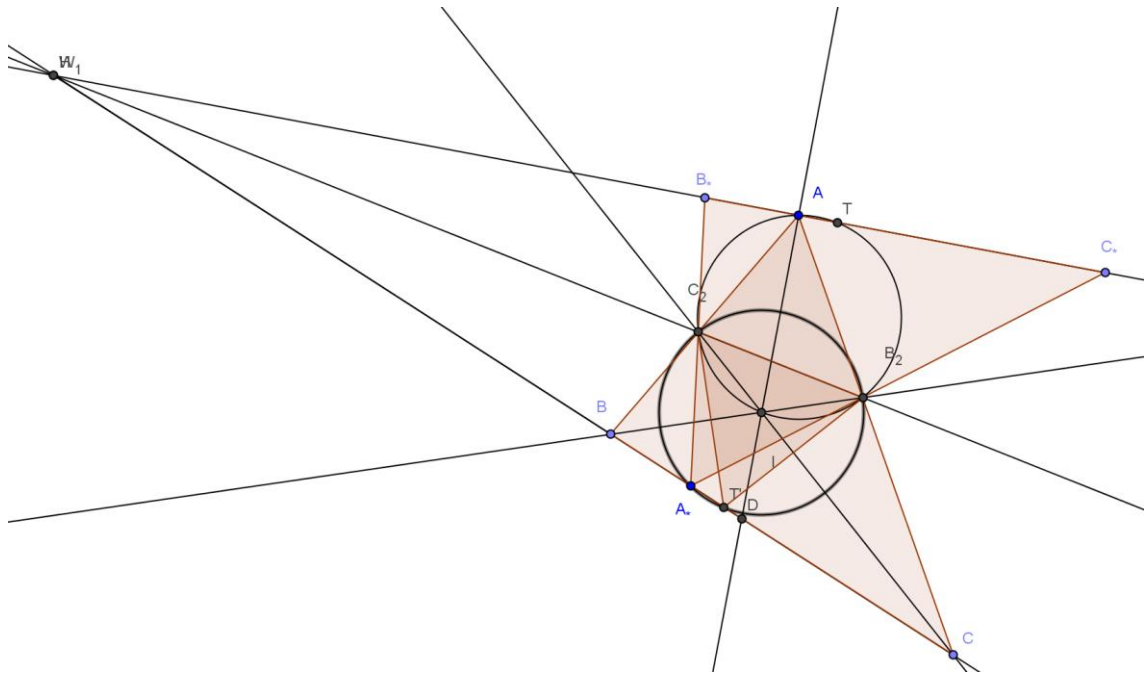
Dado que $\angle C_2TB_2 = \angle C_2AB_2 = 60^\circ$ por la construcción de T , se tiene que

$\angle W_1TC_2 = 150^\circ - (\beta/2) - 60^\circ = 90^\circ - (\beta/2)$.

Así pues considerando el triángulo W_1TC_2 , tenemos que el ángulo W_1C_2T es:

$\angle W_1C_2T = 180^\circ - \angle W_1TC_2 - \angle C_2W_1T = 180^\circ - (90^\circ - (\beta/2)) - ((\beta/2) - 30^\circ) = 120^\circ$.

Así, el triángulo B_2C_2T es equilátero, y tomando su simétrico respecto a la recta B_2C_2 obtenemos que el punto $T^* = A'_2$ está sobre la mediatriz de B_2C_2 y sobre BC siendo $B_2C_2T^*$ el triángulo equilátero pedido.

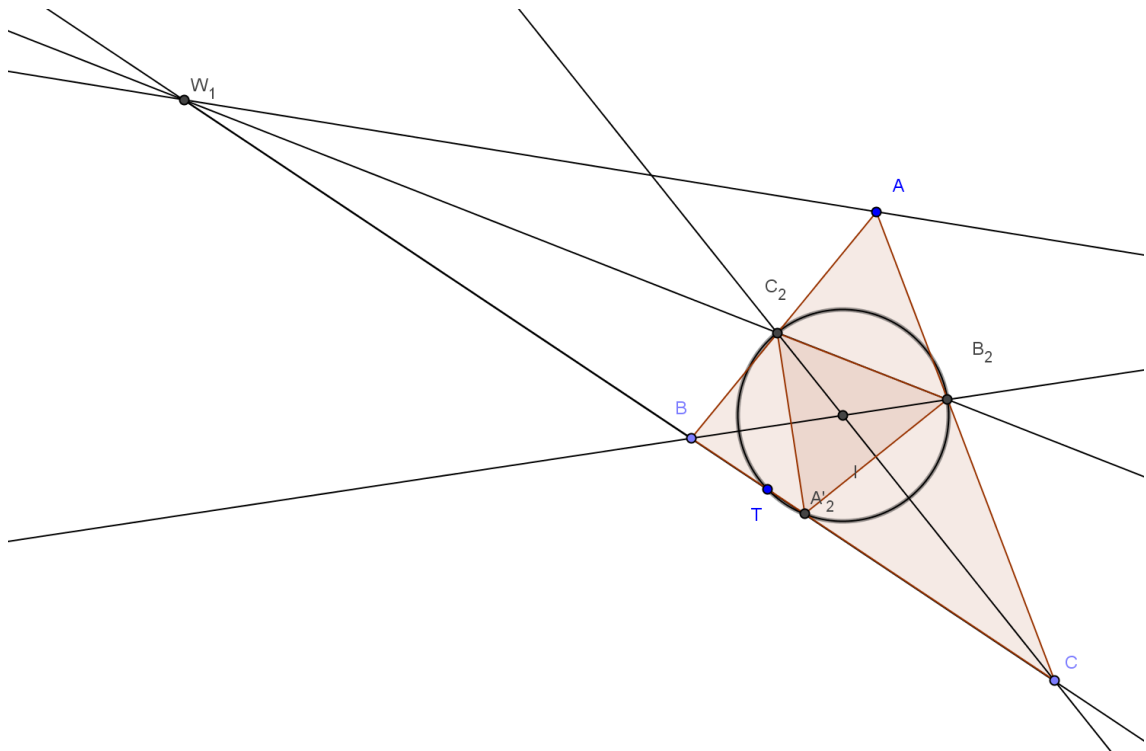


Sea ahora la situación de partida la de un triángulo ABC acutángulo tal que si trazamos la mediatriz de los pies B_2 C_2 de las bisectrices de los ángulos B y C sobre los lados AC y AB, corta al lado BC en A'_2 siendo B_2C_2 A'_2 equilátero.

La recta C_2B_2 vimos en el apartado previo que corta a la recta BC en W_1 que es el pie de la bisectriz exterior en A.

Además vimos que C_2 es el incentro del triángulo AW_1C con lo que la recta $W_1C_2B_2$ es la bisectriz del ángulo AW_1B

Tracemos la circunferencia circunscrita a B_2C_2 A'_2 .

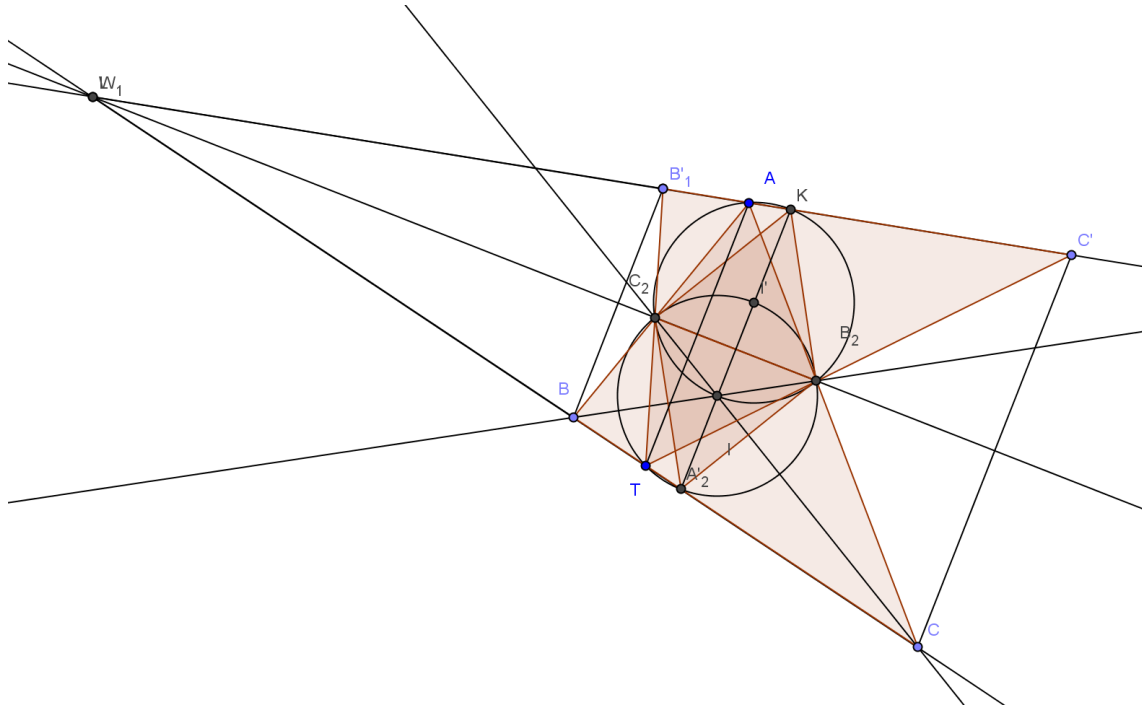


Cortará a BC en otro punto T, diferente a A'_2 .

Consideremos el triángulo B_2C_2T que tiene en el ángulo T 60° por la construcción hecha.

El triángulo simétrico de B_2C_2T respecto a B_2C_2 , B_2C_2A , nos da el vértice A buscado.

Por la simetría, el ángulo en A es de 60° . Es tal que por la definición de la bisectriz, se forman los siguientes trapecios que resuelven el problema:



BB'_1AT , $AC'CT$

Así los puntos BC_2A , por un lado y CB_2A por otro al ser diagonales de los trapecios mencionados, forman los lados del triángulo pedido y resolvemos el problema.

Ricardo Barroso Campos

Jubilado. Sevilla.