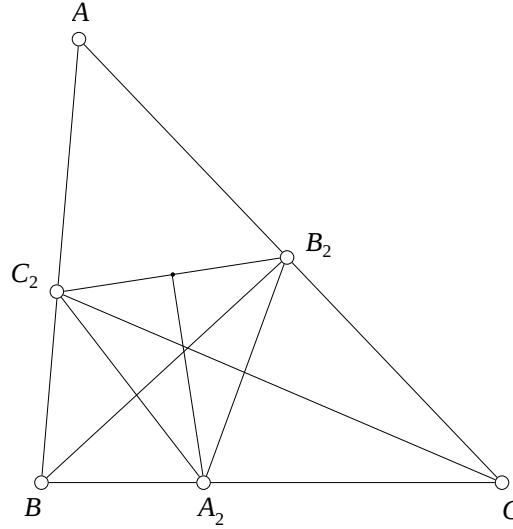


Problema 750. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB < AC$. Sean B_2, C_2 los pies de las bisectrices de los ángulos B y C sobre los lados AC y AB . Sea A_2 la intersección de la mediatriz de B_2C_2 con BC . El triángulo $A_2B_2C_2$ es equilátero si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución de Ercole Suppa.



Usando coordenadas baricéntricas¹ los puntos A, B, C, I, B_2 y C_2 tienen coordenadas

$$\begin{array}{lll} A(1 : 0 : 0) & B(0 : 1 : 0) & C(0 : 0 : 1) \\ I(a : b : c) & B_2(a : 0 : c) & C_2(a : b : 0) \end{array}$$

La mediatriz de B_2C_2I tiene ecuación

$$f(a, b, c)x + g(a, b, c)y + h(a, b, c)z = 0 \quad (1)$$

donde

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= b^2(b - c)c^2(2a + b + c) \\ g(a, b, c) &= ac(a^4 + 2a^3b - 2ab^3 - b^4 + a^3c + 4a^2bc + 2ab^2c - a^2c^2 + 2abc^2 + b^2c^2 - ac^3) \\ h(a, b, c) &= -ab(a^4 + a^3b - a^2b^2 - ab^3 + 2a^3c + 4a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2 + b^2c^2 - 2ac^3 - c^4) \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema formado por la línea BC , que tiene la ecuación $x = 0$, y la línea recta (1) se obtienen las coordenadas del punto A_2 :

$$\begin{aligned} A_2 &= (0 : b(-a^4 - a^3b + a^2b^2 + ab^3 - 2a^3c - 4a^2bc - 2ab^2c - 2abc^2 - b^2c^2 + 2ac^3 + c^4) : \\ &\quad c(-a^4 - 2a^3b + 2ab^3 + b^4 - a^3c - 4a^2bc - 2ab^2c + a^2c^2 - 2abc^2 - b^2c^2 + ac^3)) \end{aligned}$$

Utilizando la función **CuadradoDistancia** se encuentra que el triángulo $A_2B_2C_2$ es equilátero si y sólo si

$$(a^2 + ab + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + bc - c^2)(a^2 - b^2 + ac + c^2)(a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + a^2c + 3abc + b^2c - ac^2 + bc^2 - c^3) = 0 \quad (2)$$

Como el triángulo ABC es acutángulo tenemos

$$(a^2 + ab + b^2 - c^2) \neq 0, \quad (a^2 - b^2 + ac + c^2) \neq 0$$

¹En la realización de los cálculos se utilizó MATHEMATICA y el paquete **baricentricas.nb**, descargable desde el sitio de Francisco Javier García Capitán <http://garciacapitan.99on.com/baricentricas/>.

Usando la sustitución de Ravi: $a = y + z$, $b = x + z$, $c = x + y$ se obtiene

$$\begin{aligned} & a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 + a^2c + 3abc + b^2c - ac^2 + bc^2 - c^3 = \\ & = x^2y + xy^2 + x^2z + 10xyz + 9y^2z + xz^2 + 9yz^2 > 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la igualdad (2) se produce si y sólo si

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + bc - c^2 &= 0 && \Leftrightarrow \\ b^2 + c^2 - a^2 &= bc && \Leftrightarrow \\ \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} && \Leftrightarrow \\ A &= 60^\circ \end{aligned}$$

□