

Problema 750 de *triángulos cabri*. Sea ABC un triángulo, Y, Z los pies de las bisectrices de los ángulos B y C sobre los lados CA y AB . Sea X' la intersección de la mediatriz de YZ con BC . El triángulo $X'YZ$ es equilátero $A = 60^\circ$ o alguno de los ángulos B y C mide 120° .

Propuesto por Philippe Fondanaiche

Solución de *Francisco Javier García Capitán*. En esta solución presento solamente las instrucciones correspondientes de *Mathematica*, usando mi paquete de coordenadas baricéntricas. Al imponer en un triángulo cualquiera que $X'YZ$ sea equilátero, obtenemos una expresión que, factorizada, nos muestra los diferentes casos en los que esta propiedad puede cumplirse:

```
{ptX, ptY, ptZ} = TrianguloCeviano[ptI];
ptX1 = Factor[Punto[Mediatriz[ptY, ptZ], rtBC]];
X1Y2 = CuadradoDistancia[ptX1, ptY];
YZ2 = CuadradoDistancia[ptY, ptZ];
expr = Factor[X1Y2 - YZ2]
```

$$- \left((a b c (a^2 + a b + b^2 - c^2) (a^2 - b^2 + b c - c^2) (a^2 - b^2 + a c + c^2) \right. \\ \left. (a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 + a^2 c + 3 a b c + b^2 c - a c^2 + b c^2 - c^3) \right) / \\ \left((a + b)^2 (a + c)^2 (a^2 b - b^3 + a^2 c + 2 a b c + b^2 c + b c^2 - c^3)^2 \right)$$

La expresión $a^2 - b^2 + bc - c^2 = 0$ se cumple si y solo si $A = 60^\circ$.

La expresión $a^2 + ab + b^2 - c^2 = 0$ se cumple si y solo si $C = 120^\circ$.

La expresión $a^2 - b^2 + ac + c^2 = 0$ se cumple si y solo si $B = 120^\circ$.

El último paréntesis no se anula nunca. Para comprobarlo, usamos la sustitución de Ravi, expresando $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, siendo x, y, z todos positivos.

```
Factor[Last[expr] /. {a -> y + z, b -> z + x, c -> x + y}]
```

$$x^2 y + x y^2 + x^2 z + 10 x y z + 9 y^2 z + x z^2 + 9 y z^2$$