

Problema 750.

Siga $\triangle ABC$ un triangle amb $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Siguen B_2, C_2 els peus de les bisectrius dels angles B, C sobre els costats $\overline{AC}, \overline{BC}$.

Siga A'_2 la intersecció de la mediatriu de $\overline{B_2C_2}$ amb $\overline{BC}$.

El triangle $\triangle A'_2B_2C_2$ és equilàter si i només si $A = 60^\circ$.

Solució de Ricard Peiró:

Per hipòtesi $\overline{B_2A'_2} = \overline{C_2A'_2}$.

$$\angle CC_2A = B + \frac{C}{2}, \angle BB_2A = C + \frac{B}{2}.$$

$$\text{Aleshores, } \angle C_2IB_2 = 360^\circ - \left(A + B + \frac{C}{2} + C + \frac{B}{2} \right) = 90^\circ + \frac{A}{2}.$$

($\Rightarrow$)

Suposem que el triangle $\triangle A'_2B_2C_2$ és equilàter

$$\angle CB_2B = 180^\circ - C - \frac{B}{2}.$$

$$\angle CB_2A'_2 = 180^\circ - C - \frac{B}{2} - \frac{A}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

$$\text{Aleshores, } \angle CA'_2B_2 = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

Per tant la bisectriu CI és mediatriu de $\overline{B_2A'_2}$.

Anàlogament, la bisectriu BI és mediatriu de $\overline{B_2A'_2}$.

Aleshores I és el circumcentre del triangle $\triangle A'_2B_2C_2$.

$$\text{Aleshores, } \angle C_2IB_2 = 120^\circ = 90^\circ + \frac{A}{2}.$$

Aleshores, $A = 60^\circ$.

($\Leftarrow$)

Suposem $A = 60^\circ$.

$$\angle C_2IB_2 = 90^\circ + \frac{A}{2} = 120^\circ.$$

Aleshores, el quadrilàter AC_2IB_2 és inscriptible en una circumferència.

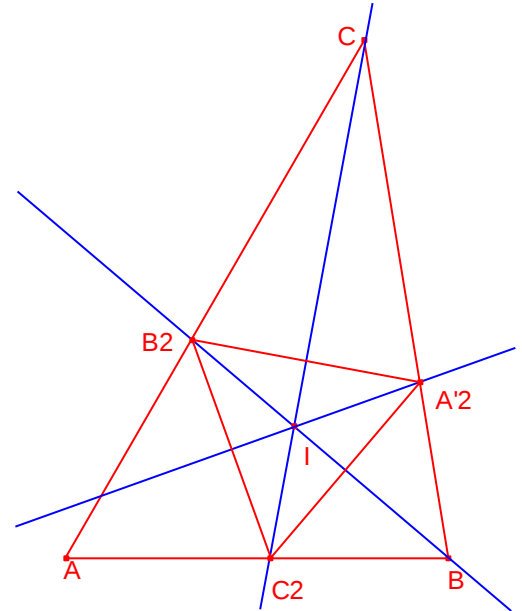
$$\angle C_2B_2I = \angle B_2AI = \frac{A}{2}.$$

$$\angle B_2C_2I = \angle B_2AI = \frac{A}{2}.$$

Aleshores, $\overline{B_2I} = \overline{C_2I}$. Aleshores, I pertany a la mediatriu $\overline{B_2C_2}$ del triangle $\triangle A'_2B_2C_2$.

$$\angle CB_2B = 180^\circ - C - \frac{B}{2}.$$

$$\angle CB_2A'_2 = 180^\circ - C - \frac{B}{2} - \frac{A}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$



Aleshores, el triangle $A'_2\overset{\Delta}{B}_2C$ és isòsceles.

Aleshores, CI és mediatriu de $\overline{B_2A'_2}$.

Aleshores, I és el circumcentre del triangle $A'_2\overset{\Delta}{B}_2C_2$.

$\overline{B_2I} = \overline{C_2I} = \overline{A'_2I}$.

Aleshores, els triangles $B_2\overset{\Delta}{I}C_2$, $A'_2\overset{\Delta}{I}B_2$, $A'_2\overset{\Delta}{I}C_2$ són iguals, aleshores,

$\overline{B_2C_2} = \overline{C_2A'_2} = \overline{A'_2B_2}$, per tant, $A'_2\overset{\Delta}{B}_2C_2$ és equilàter.