

Problema 750.

Sea $\triangle ABC$ un triángulo con $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Sean B_2, C_2 los pies de las bisectrices de los ángulos B, C sobre los lados $\overline{AC}, \overline{BC}$.

Sea A'_2 la intersección de la mediatriz de $\overline{B_2C_2}$ con $\overline{BC}$.

El triángulo $\triangle A'_2B_2C_2$ es equilátero si i sólo si $A = 60^\circ$.

Solución de Ricard Peiró:

Por hipótesis $\overline{B_2A'_2} = \overline{C_2A'_2}$.

$$\angle CC_2A = B + \frac{C}{2}, \angle BB_2A = C + \frac{B}{2}.$$

$$\text{Entonces, } \angle C_2IB_2 = 360^\circ - \left(A + B + \frac{C}{2} + C + \frac{B}{2} \right) = 90^\circ + \frac{A}{2}.$$

($\Rightarrow$)

Supongamos que el triángulo $\triangle A'_2B_2C_2$ es equilátero

$$\angle CB_2B = 180^\circ - C - \frac{B}{2}.$$

$$\angle CB_2A'_2 = 180^\circ - C - \frac{B}{2} - \frac{A}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

$$\text{Entonces, } \angle CA'_2B_2 = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

Por tanto la bisectriz CI es mediatriz de $\overline{B_2A'_2}$.

Análogamente, la bisectriz BI es mediatriz de $\overline{B_2A'_2}$.

Entonces I es el circuncentro del triángulo $\triangle A'_2B_2C_2$.

$$\text{Entonces, } \angle C_2IB_2 = 120^\circ = 90^\circ + \frac{A}{2}.$$

$$\text{Entonces, } A = 60^\circ.$$

($\Leftarrow$)

Supongamos $A = 60^\circ$.

$$\angle C_2IB_2 = 90^\circ + \frac{A}{2} = 120^\circ.$$

Entonces, el cuadrilátero AC_2IB_2 es inscriptible en una circunferencia.

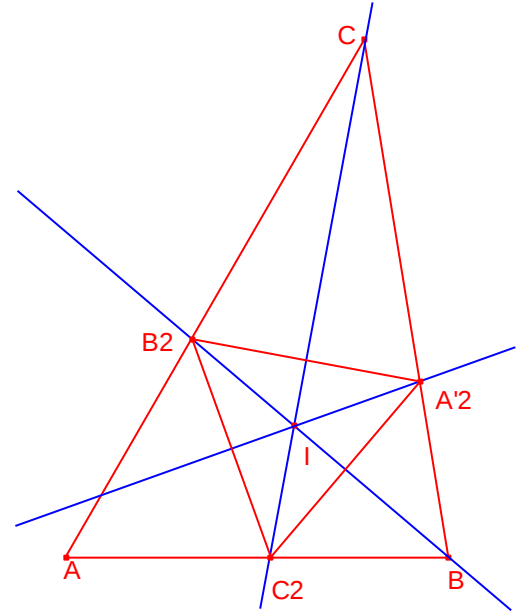
$$\angle C_2B_2I = \angle B_2AI = \frac{A}{2}.$$

$$\angle B_2C_2I = \angle B_2AI = \frac{A}{2}.$$

Entonces, $\overline{B_2I} = \overline{C_2I}$. Entonces, I pertenece a la mediatriz $\overline{B_2C_2}$ del triángulo

$\triangle A'_2B_2C_2$.

$$\angle CB_2B = 180^\circ - C - \frac{B}{2}.$$



$$\angle CB_2A'_2 = 180^\circ - C - \frac{B}{2} - \frac{A}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

Entonces, el triángulo $A'_2 \overset{\Delta}{B}_2 C$ es isósceles.

Entonces, I es mediatriz de $\overline{B_2 A'_2}$.

Entonces, I es el circuncentro del triángulo $A'_2 \overset{\Delta}{B}_2 C_2$.

$$\overline{B_2 I} = \overline{C_2 I} = \overline{A'_2 I}.$$

Entonces, los triángulos $B_2 \overset{\Delta}{I} C_2$, $A'_2 \overset{\Delta}{I} B_2$, $A'_2 \overset{\Delta}{I} C_2$ son iguales, entonces,

$\overline{B_2 C_2} = \overline{C_2 A'_2} = \overline{A'_2 B_2}$, por tanto, $A'_2 \overset{\Delta}{B}_2 C_2$ es equilátero.