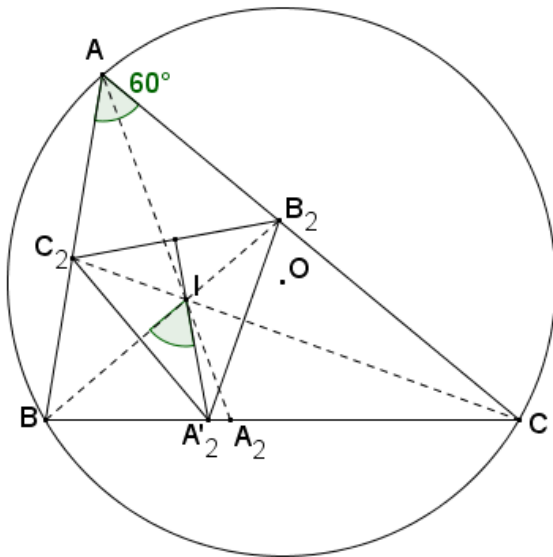


Problema 750

Sea ABC un acutángulo triángulo con $AB < AC$. Sean B_2, C_2 los pies de las bisectrices de los ángulos B y C sobre los lados AC y AB . Sea A'_2 la intersección de la mediatriz de B_2C_2 con BC . El triángulo $A'_2B_2C_2$ es equilátero si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Si l'angle $\angle BAC = 60^\circ$, alors le triangle $A'_2B_2C_2$ est équilatéral

Démonstration

Dans tout triangle ABC dont I est centre du cercle inscrit, on a la relation $\angle BIC = 90^\circ + \angle BAC/2$.

Si $\angle BAC = 60^\circ$, alors $\angle BIC = \angle B_2IC_2 = 120^\circ$. Les quatre points A, B_2, I, C_2 sont alors cocycliques.

Comme $\angle IAB_2 = \angle IAC_2 = 30^\circ$, les cordes IB et IC sont égales et la médiatrice du segment B_2C_2 qui coupe BC au point A'_2 passe donc par le point I et c'est en même temps la bissectrice de l'angle $\angle BIC$.

Il en résulte $\angle A'_2IB = 60^\circ = \angle BIC_2 = 180^\circ - \angle B_2IC_2$.

Les triangles IBA'_2 et IBC_2 étant isométriques (un côté commun et deux angles égaux deux à deux), on a $IA'_2 = IC_2$ et de la même manière $IA'_2 = IB_2$. D'où $IA'_2 = IB_2 = IC_2$ avec $\angle A'_2IB_2 = \angle A'_2IC_2 = 120^\circ$. Le triangle $A'_2B_2C_2$ est équilatéral.

Réciproquement si le triangle $A'_2B_2C_2$ est équilatéral, alors $\angle BAC = 60^\circ$.

Démonstration

On considère les triangles $BB_2A'_2$ et BB_2C_2 qui partagent un côté commun BB_2 .

On a $B_2A'_2 = B_2C_2$ et $\angle B_2BA'_2 = \angle B_2BC_2$.

On a deux cas de figure : soit $B_2A'_2B + B_2C_2B = 180^\circ$ soit $\angle B_2A'_2B = \angle B_2C_2B$.

Comme par hypothèse le triangle ABC est acutangle, $\angle ABC < 90^\circ$ et que $\angle C_2BA'_2 = 60^\circ$, on en déduit $\angle B_2A'_2B + \angle B_2C_2B > 210^\circ$.

Dès lors $\angle B_2A'_2B = \angle B_2C_2B$ et les deux triangles $BB_2A'_2$ et BB_2C_2 sont isométriques. Il en résulte que $BA'_2 = BC_2$. D'où $IA'_2 = IC_2$. De la même manière $IA'_2 = IB_2$. le point I est le centre du cercle circonscrit au triangle $A'_2B_2C_2$.

D'où $\angle B_2IC_2 = 2 \angle B_2A'_2C_2 = 120^\circ = \angle BIC = \angle BAC/2 + 90^\circ$ donnant $\angle BAC = 60^\circ$.