

Problema 751

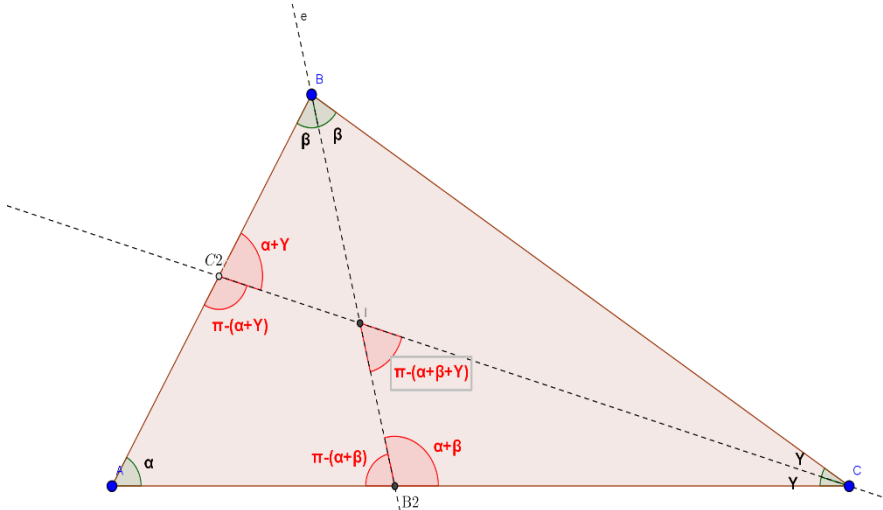
Sea ABC un triángulo con $AB < AC$.

Sean B_2 C_2 los pies de las bisectrices de los ángulos B y C sobre los lados AC y AB.

$BC = BC_2 + CB_2$ si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución (por Adolfo Soler)



En el gráfico de la figura, aplicamos la ley del seno a los triángulos BCC_2 y BCB_2 , obteniéndose:

$$\frac{BC}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{BC_2}{\sin \gamma}$$

$$\frac{BC}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{CB_2}{\sin \beta}$$

$$\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$$

Expresando γ en función de α y β y simplificando:

$$\frac{BC}{\cos(\frac{\alpha}{2} - \beta)} = \frac{BC_2}{\cos(\frac{\alpha}{2} + \beta)}$$

$$\frac{BC}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{CB_2}{\sin(\beta)}$$

Desarrollando:

$$\frac{BC}{\cos \beta \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \beta \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{BC_2}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \beta - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \beta} \Rightarrow \frac{BC}{\cos \frac{\alpha}{2} + \tan \beta \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{BC_2}{\cos \frac{\alpha}{2} - \tan \beta \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$CB_2 = \frac{BC}{\sin \alpha \cot \beta + \cos \alpha} \Rightarrow \tan \beta = \frac{CB_2 \sin \alpha}{BC - CB_2 \cos \alpha}$$

Sustituyendo $\tan \beta$ y simplificando:

$$\frac{BC}{BC - CB_2(\cos \alpha - \sin \alpha \tan \frac{\alpha}{2})} = \frac{BC_2}{BC - CB_2(\cos \alpha + \sin \alpha \tan \frac{\alpha}{2})}$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha \tan \frac{\alpha}{2} = 0$$

De donde se deduce que $BC = BC_2 + CB_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = 1/2 \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha \tan \frac{\alpha}{2} = 1$$

($\alpha = 300^\circ$ no es posible)

quod erat demonstrandum

