Problema 751.-

Sobre un ángulo de 60º (V). Sea ABC un triángulo con AB<AC. Sean B_2, C_2 los pies de las bisectrices de los ángulos B y C sobre los lados AC y AB.

$BC = BC_2 + B_2C$ si y sólo si <A=60º.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Dem.-

Si realizamos la construcción indicada, podemos observar que el punto I donde se cortan las bisectrices BB_2 y CC_2 es el incentro del triángulo ABC.

⇒ Supongamos que ∠BAC=60º.

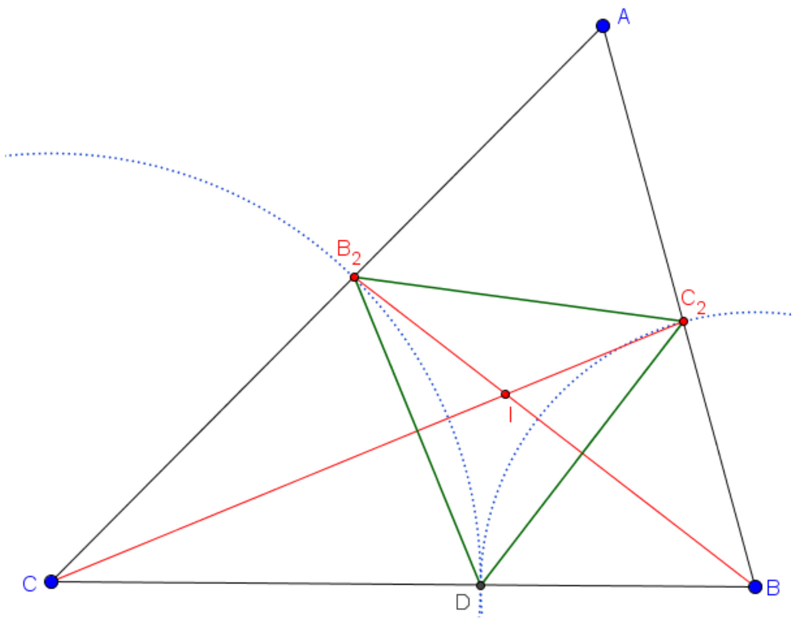
Por el problema anterior, el P750, tenemos que el triángulo $A'_2B_2C_2$ es equilátero. Como el punto I es incentro de dicho triángulo equilátero, también lo será circuncentro, y así las cevianas BB_2 y CC_2 serán mediatrices de los lados A'_2C_2 y A'_2B_2, respectivamente. Por tanto, se darán las siguientes igualdades entre segmentos:

$BC_2=BA'_2$ y $CB_2=CA'_2 \rightarrow BC = BA'_2 + A'_2C = BC_2 + B_2C$

⇒ Supongamos que $BC = BC_2 + B_2C$.

Entonces, podemos determinar sobre el lado BC, el punto D, de modo que $BD=BC_2$ y $CD=CB_2$. Por tanto, las bisectrices BB_2 y CC_2 se convierten en mediatrices del triángulo B_2C_2D.

Por tanto, la mediatriz del tercer lado, B_2C_2 pasa también por el punto I, incentro del triángulo inicial ABC.



De esta forma, este punto I deberá pertenecer a la circunferencia circunscrita al triángulo AB_2C_2.

En definitiva, el ángulo en I valdrá

$\measuredangle B_2IC_2 = 180^o - \measuredangle A$

Por otro lado,

$\measuredangle BIC = \measuredangle B_2IC_2; \quad \measuredangle BIC = 90^o + \measuredangle \frac{1}{2}A$

$\Rightarrow 90^o + \measuredangle \frac{1}{2}A = 180^o - \measuredangle A \Rightarrow \measuredangle A = 60^o$