

Problema 751

Sobre un ángulo de 60° (V)

Sea ABC un triángulo con $AB < AC$

Sean B_2 C_2 los pies de las bisectrices de los ángulos B y C sobre los lados AC y AB.

$BC = BC_2 + CB_2$ si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución del director:

Sea $\angle A \leq 60^\circ$.

Es por el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - bc$$

Por el teorema de la bisectriz,

$$BC_2 = \frac{ac}{b+a}, \quad CB_2 = \frac{ab}{c+a}$$

$$\text{Es } BC_2 + CB_2 = \frac{ac}{b+a} + \frac{ab}{c+a} = \frac{a(c^2 + ca + b^2 + ba)}{(bc + ba + ac + a^2)} = a.$$

Supongamos ahora que tenemos un triángulo en el que $BC = BC_2 + CB_2$.

Será pues :

$$a = \frac{ac}{b+a} + \frac{ab}{c+a}, \text{ o sea:}$$

$$(b+a)(c+a) = c(c+a) + b(b+a)$$

$$bc + ba + ac + a^2 = c^2 + ca + b^2 + ba$$

De donde

$$a^2 = c^2 + b^2 - cb$$

Luego considerando la fórmula del coseno, es

$$\cos A = 1/2, \text{ de donde } \angle A = 60^\circ.$$

Ricardo Barroso Campos

Jubilado.

Sevilla.