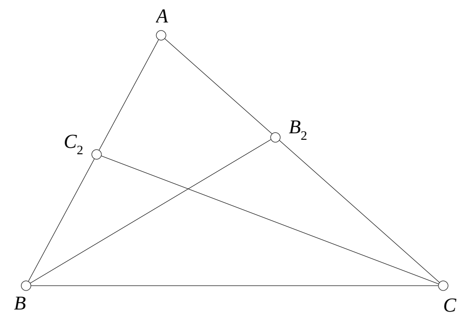
Problema 751. Sea ABC un triángulo con $AB < AC$. Sean B_2, C_2 los pies de las bisectrices de los ángulos B y C sobre los lados AC y AB. Tenemos $BC = BC_2 + CB_2$ si y sólo si $\angle A = 60°$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución de Ercole Suppa.



Por el teorema de que bisectriz tenemos

$$\begin{gathered} BC_2 : C_2A = BC : CA \quad \Leftrightarrow \\ (BC_2 + C_2A) : BC_2 = (BC + CA) : BC \quad \Leftrightarrow \\ AB : BC_2 = (BC + CA) : BC \quad \Leftrightarrow \\ BC_2 = \frac{AB \cdot BC}{BC + CA} = \frac{ac}{a+b} \end{gathered}$$

Del mismo modo tenemos $CB_2 = \frac{ab}{a+c}$. Por lo tanto

$$\begin{gathered} BC = BC_2 + CB_2 \quad \Leftrightarrow \\ a = \frac{ac}{a+b} + \frac{ab}{a+c} \quad \Leftrightarrow \\ 1 = \frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} \quad \Leftrightarrow \\ (a+b)(a+c) = c(a+c) + b(a+b) \quad \Leftrightarrow \\ b^2 + c^2 - a^2 = bc \quad \Leftrightarrow \\ \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \\ \cos A = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \\ A = 60° \end{gathered}$$

y hemos terminado.

$\square$