

Problema 751 de *triángulos cabri*. Sea ABC un triángulo con $AB < AC$ e Y, Z los pies de las bisectrices de los ángulos B y C sobre los lados CA y AB . Sea Demostrar que $BC = BZ + CY$ si y solo si $A = 60^\circ$.

Propuesto por Philippe Fondanaiche

Solución de *Francisco Javier García Capitán*. Por el teorema de la bisectriz, $CY : YA = BC : BA = a : c$ Entonces se tiene $CY = \frac{ab}{a+c}$. De la misma forma $BZ = \frac{ac}{a+b}$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{ac}{a+b} + \frac{ab}{a+c} &= a \Leftrightarrow c(a+c) + b(a+b) = (a+b)(a+c) \\ \Leftrightarrow ac + c^2 + ab + b^2 &= a^2 + ac + ab + bc \\ \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 - bc &= 0 \\ \Leftrightarrow A &= 60^\circ. \end{aligned}$$