

Problema 751.

Siga $\triangle ABC$ un triangle amb $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Siguen B_2 , C_2 els peus de les bisectrius dels angles B, C sobre els costats $\overline{AC}$, $\overline{BC}$.

$\overline{BC} = \overline{BC_2} + \overline{CB_2}$ si i només si $A = 60^\circ$.

Solució de Ricard Peiró:

Aplicant la propietat de la bisectriu a l'angle B del triangle $\triangle ABC$:

$$\overline{BC_2} = \frac{ac}{a+b}.$$

Aplicant la propietat de la bisectriu a l'angle C del triangle $\triangle ABC$:

$$\overline{CB_2} = \frac{ab}{a+c}.$$

$$\overline{BC_2} + \overline{CB_2} = a \left(\frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} \right) = a \frac{b^2 + c^2 + ac + ab}{a^2 + ab + ac + bc}.$$

($\Rightarrow$)

Suposem que $\overline{BC} = \overline{BC_2} + \overline{CB_2}$.

$$a = a \frac{b^2 + c^2 + ac + ab}{a^2 + ab + ac + bc}. \text{ Simplificant:}$$

$$\frac{b^2 + c^2 + ac + ab}{a^2 + ab + ac + bc} = 1.$$

$$b^2 + c^2 + ac + ab = a^2 + ab + ac + bc. \text{ Simplificant:}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

Aleshores, $\cos A = \frac{1}{2}$, per tant, $A = 60^\circ$.

($\Leftarrow$)

Suposem $A = 60^\circ$.

$$\overline{BC_2} + \overline{CB_2} = a \frac{b^2 + c^2 + ac + ab}{a^2 + ab + ac + bc}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\triangle ABC$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 60^\circ.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc.$$

$$\overline{BC_2} + \overline{CB_2} = a \frac{a^2 + bc + ac + ab}{a^2 + ab + ac + bc}. \text{ Simplificant:}$$

$$\overline{BC_2} + \overline{CB_2} = a.$$

