

Problema 751.

Sea $\triangle ABC$ un triángulo con $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Sean B_2 , C_2 los pies de las bisectrices de los ángulos B, C sobre los lados $\overline{AC}$, $\overline{BC}$.

$\overline{BC} = \overline{BC_2} + \overline{CB_2}$ si y sólo si $A = 60^\circ$.

Solución de Ricard Peiró:

Aplicando la propiedad de la bisectriz del ángulo B del triángulo $\triangle ABC$:

$$\overline{BC_2} = \frac{ac}{a+b}.$$

Aplicando la propiedad de la bisectriz del ángulo C del triángulo $\triangle ABC$:

$$\overline{CB_2} = \frac{ab}{a+c}.$$

$$\overline{BC_2} + \overline{CB_2} = a \left(\frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} \right) = a \frac{b^2 + c^2 + ac + ab}{a^2 + ab + ac + bc}.$$

($\Rightarrow$)

Supongamos que $\overline{BC} = \overline{BC_2} + \overline{CB_2}$.

$$a = a \frac{b^2 + c^2 + ac + ab}{a^2 + ab + ac + bc}. \text{ Simplificando:}$$

$$\frac{b^2 + c^2 + ac + ab}{a^2 + ab + ac + bc} = 1.$$

$$b^2 + c^2 + ac + ab = a^2 + ab + ac + bc. \text{ Simplificando:}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc.$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\triangle ABC$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

Entonces, $\cos A = \frac{1}{2}$, per tant, $A = 60^\circ$.

($\Leftarrow$)

Supongamos $A = 60^\circ$.

$$\overline{BC_2} + \overline{CB_2} = a \frac{b^2 + c^2 + ac + ab}{a^2 + ab + ac + bc}.$$

Aplicando el teorema del coseno al triángulo $\triangle ABC$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 60^\circ.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc.$$

$$\overline{BC_2} + \overline{CB_2} = a \frac{a^2 + bc + ac + ab}{a^2 + ab + ac + bc}. \text{ Simplificando:}$$

$$\overline{BC_2} + \overline{CB_2} = a.$$

