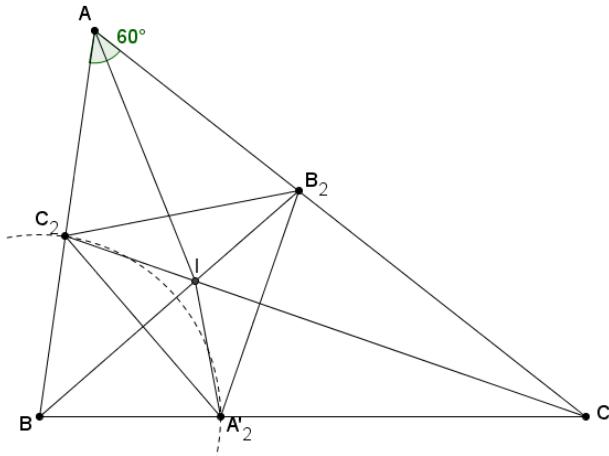


Problema 751

Sea ABC un triángulo con $AB < AC$. Sean B_2, C_2 los pies de las bisectrices de los ángulos B y C sobre los lados AC y AB . $BC = BC_2 + CB_2$ si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Si $\angle BAC = 60^\circ$, alors $BC = BC_2 + CB_2$

On trace A'_2 sur BC tel que $BA'_2 = BC_2$.

Les triangles BIA'_2 et BIC_2 étant égaux, il en résulte que $\angle BA'_2I = \angle BC_2I$.

Par ailleurs comme $\angle ACB = 120^\circ - \angle ABC$, on a $\angle BCC_2 = 60^\circ - \angle ABC/2$.

D'où $\angle BA'_2I = \angle BC_2I = 180^\circ - \angle ABC - \angle BCC_2 = 120^\circ - \angle ABC/2$ et $\angle CA'_2I = 60^\circ + \angle ABC/2$.

Or $\angle CB_2I = \angle BAC + \angle ABC/2 = 60^\circ + \angle ABC/2$.

D'où $\angle CA'_2I = \angle CB_2I$. Les deux triangles CB_2I et CA'_2I sont égaux et on a $CB_2 = CA'_2$.

D'où l'équation $BC = BC_2 + CB_2$.

Par la même occasion on vérifie que les trois segments IB_2, IC_2 et IA'_2 sont égaux.

On a d'abord $IC_2 = IA'_2$. D'autre part $\angle C_2IB_2 = \angle BIC = 180^\circ - \angle IBC - \angle ICB = 180^\circ - (\angle ABC/2 + \angle ACB/2) = 90^\circ + \angle BAC/2 = 120^\circ$. Les points A, B_2, I et C_2 sont cocycliques.

Comme $\angle IB_2C_2 = \angle IC_2B_2 = \angle BAC/2 = 30^\circ$, les cordes IB_2 et IC_2 sont égales.

Si $BC = BC_2 + CB_2$, alors $\angle BAC = 60^\circ$

Soit A'_2 sur BC tel que $BA'_2 = BC_2$. Comme B_2 est sur la bissectrice issue de B , on a $B_2C_2 = B_2A'_2$. Par ailleurs $CB_2 = BC - BC_2 = BC - BA'_2 = CA'_2$. C_2 étant sur la bissectrice issue de C , on a $C_2B_2 = C_2A'_2$. Le triangle $B_2C_2A'_2$ est donc équilatéral et son centre est le point I qui est à l'intersection des médiatrices des côtés $B_2A'_2$ et $C_2A'_2$. On en déduit $\angle B_2IC_2 = 120^\circ$.

Comme $\angle BC_2I = \angle BA'_2I = 180^\circ - \angle CA'_2I = 180^\circ - \angle CB_2I = \angle AB_2I$, les points A, B_2, I et C_2 sont cocycliques et $\angle BAC = 180^\circ - \angle B_2IC_2 = 60^\circ$.