

Sean dados una recta a , un punto M_a sobre ella y dos puntos exteriores A y D .
Sobre la recta a se toma un punto variable X y su reflexión X' , respecto a M_a .
Designamos por P el punto de intersección de las rectas AX y DX' .

1. Demostrar que el lugar geométrico de P al variar X sobre a es una cónica.
2. Hallar los puntos del infinito de la cónica y el lugar geométrico de D para que la cónica sea una hipérbola equilátera.
3. Hallar el lugar geométrico de los centros de esas hipérbolas equiláteras.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **752**.
<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm>

Propuesto por Francisco Javier García Capitán y dedicado a la memoria de José María Pedret, con el siguiente enunciado:

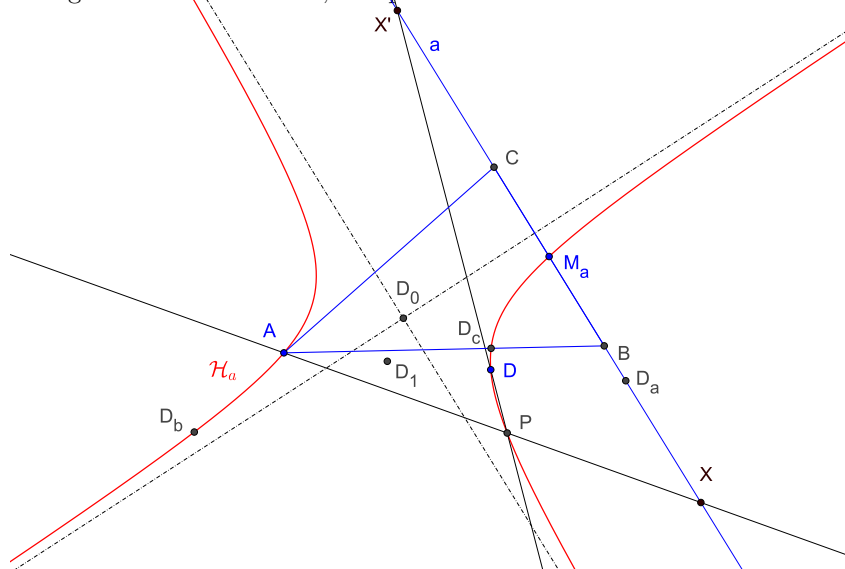
Sean ABC un triángulo y D un punto. Sea M el punto medio de BC y, para cada punto X sobre BC , sea X' su simétrico respecto de M , y P el punto de intersección de las rectas AX y DX' .

— 1. Demostrar que el lugar geométrico de P al variar X sobre BC es una cónica, salvo en algún caso.

— 2. Hallar los puntos del infinito de la cónica y el lugar geométrico de D para que la cónica sea una hipérbola equilátera.

— 3. Hallar el lugar geométrico de los centros de esas hipérbolas equiláteras.

Este enunciado ha sido ligeramente modificado, aunque manteniendo la notación establecida.



Descargar archivo GeoGebra

1 Resolución sintética

Como la correspondencia $X \mapsto X'$ es una proyectividad sobre la recta a , la correspondencia $AX \mapsto DX'$ es una proyectividad entre haces de rectas con puntos base en A y D . Por consiguiente, el lugar geométrico de P , cuando X varía, es una cónica $\mathcal{H}_a$ que pasa por A y D .

El punto M_a está en $\mathcal{H}_a$, pues si $X = M_a$, $X' = X$ y $P = M_a$.

El punto del infinito de la recta a es de $\mathcal{H}_a$, ya que si X es el punto del infinito de a , las rectas AX y DX' son paralelas a la recta a .

Si el punto X es tal que la recta AX es paralela a la recta que une M_a con el punto medio D_1 del segmento AD , entonces, las rectas DX' y AX son paralelas, por el teorema de Tales.

La cónica $\mathcal{H}_a$ es entonces una **hipérbola**, de asíntotas paralelas a las rectas a y D_1M_a .

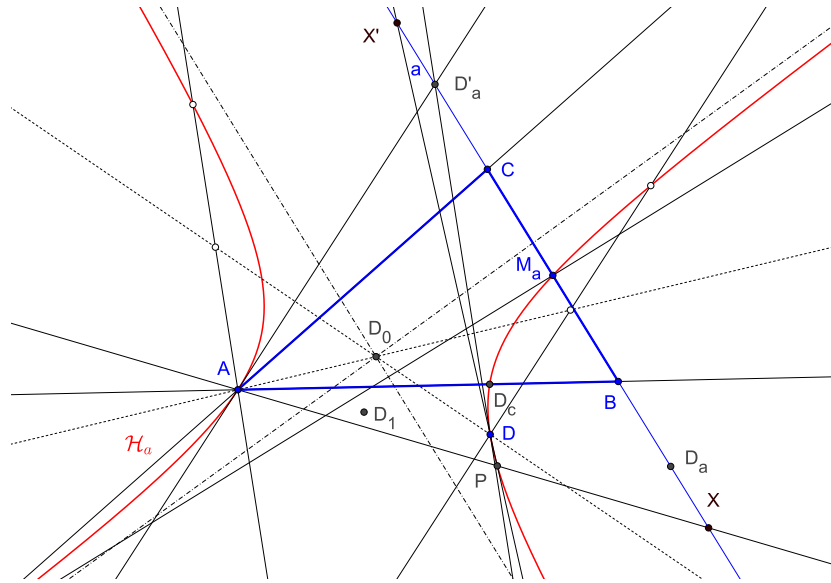
Tenemos cinco puntos de $\mathcal{H}_a$ (A, D, M_a y dos en el infinito) con lo que ya se puede construir. Se puede sustituir los puntos del infinito encontrados por otros dos puntos de la hipérbola, que podemos obtener tomando un punto B sobre a y su reflexión C en M_a ; entonces, los puntos $D_b = AC \cap DB$ y $D_c = AB \cap DC$ son de $\mathcal{H}_a$.

1.1 Tangentes en A y D

Si D_a es el punto de intersección de a con AD y D'_a es la reflexión de D_a en M_a , las tangentes en A y D a $\mathcal{H}_a$ son, respectivamente, las rectas AD'_a y DD'_a .

1.2 Construcción del centro de $\mathcal{H}_a$

Sean la recta que une D con el punto medio de la cuerda ⁽¹⁾ por A paralela a la tangente en D , y la recta que une A con el punto medio de la cuerda por D paralela a la tangente en A . Ambas rectas se cortan en el centro D_0 de la hipérbola $\mathcal{H}_a$.



1.3 Hipérbolas degeneradas

En los tres casos que vamos a presentar la correspondencia $AX \mapsto DX'$ es una perspectividad (ya que $AD \mapsto DA$), por lo que el lugar geométrico del punto P es el eje de perspectividad, junto con la recta AD .

- Cuando el punto D está sobre la recta a , el punto P queda sobre dicha recta y la hipérbola degenera en el producto de las rectas a y AD' (D' es la reflexión de D en M_a).
- Cuando el punto D está sobre las rectas AM_a , el lugar geométrico del punto P es el eje de perspectividad (paralelo a a), junto con la recta AM_a .
- Si D está sobre la paralela a a por A , el punto P queda sobre la perpendicular a a por M_a y la hipérbola degenera en el producto tal paralela y dicha perpendicular.

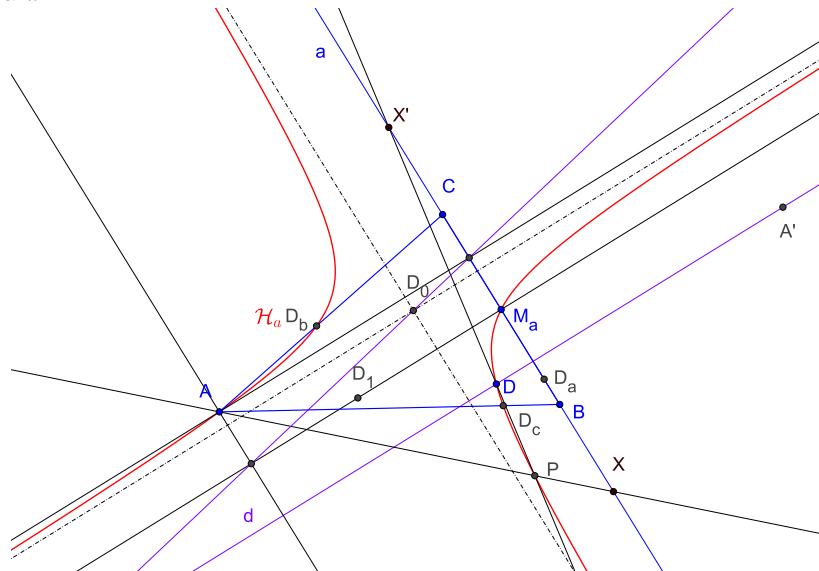
1.4 Hipérbolas equiláteras

Por la descripción que hemos dado de las asíntotas de $\mathcal{H}_a$, ésta es equilátera si el punto D está en la recta d imagen, mediante la homotecia de centro en A y razón 2, de la perpendicular a a por M_a .

El lugar geométrico de los centros de las hipérbolas equiláteras, cuando D varía sobre la recta d , es una recta (?), por lo que para determinarla solo necesitamos dos puntos. Podemos tomar los puntos singulares de un par de cónicas degeneradas. Por ejemplo, si de D es $a \cap d$, el punto singular es el pie de la perpendicular desde A a a ; y si D es el

⁽¹⁾Si se conocen cinco puntos de una cónica, el segundo punto de intersección de una recta, que pase por uno de ellos, con la cónica se puede construir con solo regla, utilizando el Teorema de Pascal para un hexágono inscrito en la cónica. Ver por ejemplo, §12.5 Appendix: Constructions with conics. Introduction to the Geometry of the Triangle, 2001 (Paul Yiu)

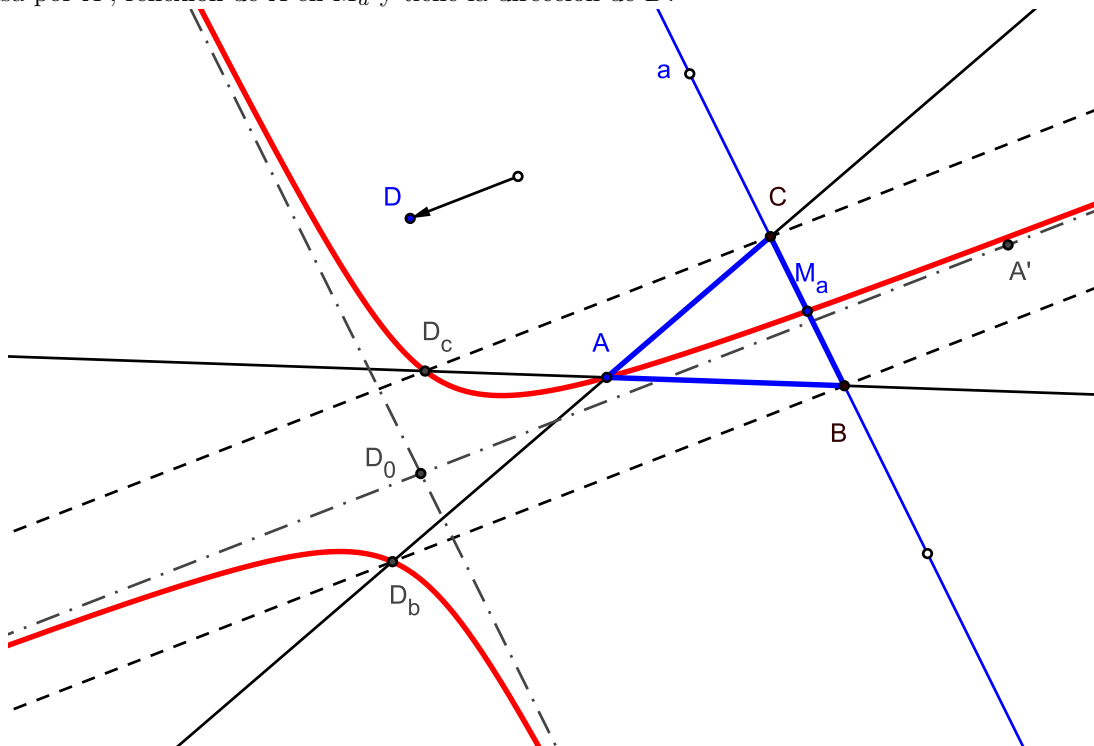
punto de intersección de d con la paralela por A a a , el punto singular es el de intersección de dicha paralela con la perpendicular por M_a a a .



Descargar archivo GeoGebra

1.5 Caso D en el infinito

La reflexión de la recta a en A es una asíntota de la hipérbola para cualquier punto D en el infinito. La otra asíntota pasa por A' , reflexión de A en M_a y tiene la dirección de D .



Descargar archivo GeoGebra

2 Resolución Analítica

Tomemos el triángulo ABC como referencia para un sistema de coordenadas baricéntricas. Sea $M_a(0 : 1 : 1)$ el punto medio del segmento BC y D un punto de coordenadas $(u : v : w)$.

Sea $X(0 : t : 1 - t)$ un punto arbitrario sobre la recta BC y su simétrico $X'(0 : 1 - t : t)$, respecto a M_a . Las coordenadas del punto P de intersección de las rectas AX y DX' son:

$$\lambda(x : y : z) = ((2t - 1)u : t(-w + t(v + w)) : (1 - t)(-w + t(v + w))).$$

Eliminado t y λ , se obtiene la ecuación de una cónica $\mathcal{H}_a$:

$$uy^2 - uz^2 - vxy + wxz = 0,$$

Esta cónica pasa por A, M_a, D y por los pies $(u : 0 : w)$ y $(u : v : 0)$ de las cevianas BD y CD .

La cónica $\mathcal{H}_a$ es **degenerada** cuando $u(v - w)(v + w) = 0$, es decir cuando el punto D está sobre la recta BC , la mediana por A o la recta paralela a BC por A .

El centro de $\mathcal{H}_a$, polo de la recta del infinito $x + y + z = 0$, es:

$$A_0(2u(2u + v + w) : 2uv + w(v + w) : v^2 + 2uw + vw).$$

La cónica $\mathcal{H}_a$ corta a la recta del infinito en los puntos $(0 : 1 : -1)$ y $(-2u - v - w : u + w : u + v)$. Por lo que se trata de una **hipérbola** de asíntotas:

$$\begin{aligned} (v + w)x - 2uy - 2uz &= 0, \text{ (paralela a } BC) \\ u(-v + w)x + (2u^2 + 2u(v + w) + v(v + w))y + (-2u^2 - 2u(v + w) - w(v + w))z &= 0. \end{aligned}$$

Por las descripción de las asíntotas hecha en el estudio sintético previo, la segunda asíntota ha de ser paralela a la recta D_1M_a que une los puntos medios de los segmentos AD y BC , respectivamente. Esto se comprueba, observando que las coordenadas de D_1 son $(2u + v + w : v : w)$ y la recta D_1M_a es: $px + qy + rz = (v - w)x + (-2u - v - w)y + (2u + v + w)z = 0$, cuyo punto del infinito es $(q - r : r - p : p - q) = (-2u - v - w : u + w : u + v)$.

La hipérbola $\mathcal{H}_a$ es equilátera o rectangular cuándo sus asíntotas son perpendiculares. Para determinar los puntos D para los cuales esto ocurra, como conocemos las coordenadas de los puntos del infinito de las asíntotas $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1) = (0, 1 - 1)$ y $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2) = (-2u - v - w : u + w : u + v)$, usamos la condición de ortogonalidad:

$$S_A\lambda_1\lambda_2 + S_B\mu_1\mu_2 + S_C\nu_1\nu_2 = 0,$$

donde $S_A = (b^2 + c^2 - a^2)/2, \dots$ y a, b, c las longitudes de los lados de ABC .

Por lo que las coordenadas de D han de satisfacer a $(S_B - S_C)u - S_Cv + S_Bw = 0$.

Es decir, el lugar geométrico de D para que la hipérbola $\mathcal{H}_a$ sea equilátera es la recta:

$$d : (2c^2 - 2b^2)x - (a^2 + b^2 - c^2)y + (a^2 - b^2 + c^2)z = 0, \quad (1)$$

perpendicular a BC por el simétrico A' de A , respecto a M_a .

Para determinar el lugar geométrico de los centros de las hipérbolas equiláteras, cuando D sobre la recta (1), se eliminan u, v, w entre las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2(b^2 - c^2)u + (a^2 + b^2 - c^2)v - (a^2 - b^2 + c^2)w &= 0, \\ \lambda(x, y, z) = (2u(2u + v + w), 2uv + w(v + w), v^2 + 2uw + vw). \end{aligned}$$

Y se obtiene la recta:

$$(b^2 - c^2)x + (a^2 - b^2 + c^2)y - (a^2 + b^2 - c^2)z = 0,$$

que pasa por el pie de la altura desde A en el triángulo ABC y por el punto de intersección de la mediatriz de BC con la paralela por A a BC .

3 Complemento: Geometría del triángulo

Si se procede cíclicamente sobre los vértices del triángulo, obtenemos para cada punto D otras dos hipérbolas $\mathcal{H}_b$ y $\mathcal{H}_c$.

Designamos por h_a, h_b y h_c , respectivamente, las asíntotas de las hipérbolas $\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b$ y $\mathcal{H}_c$, que son paralelas a los lados de ABC .

El centro de homotecia H de los triángulos ABC y el delimitado por h_a, h_b y h_c es:

$$H \left(\frac{u}{2u + v + w} : \frac{v}{u + 2v + w} : \frac{w}{u + v + 2w} \right).$$

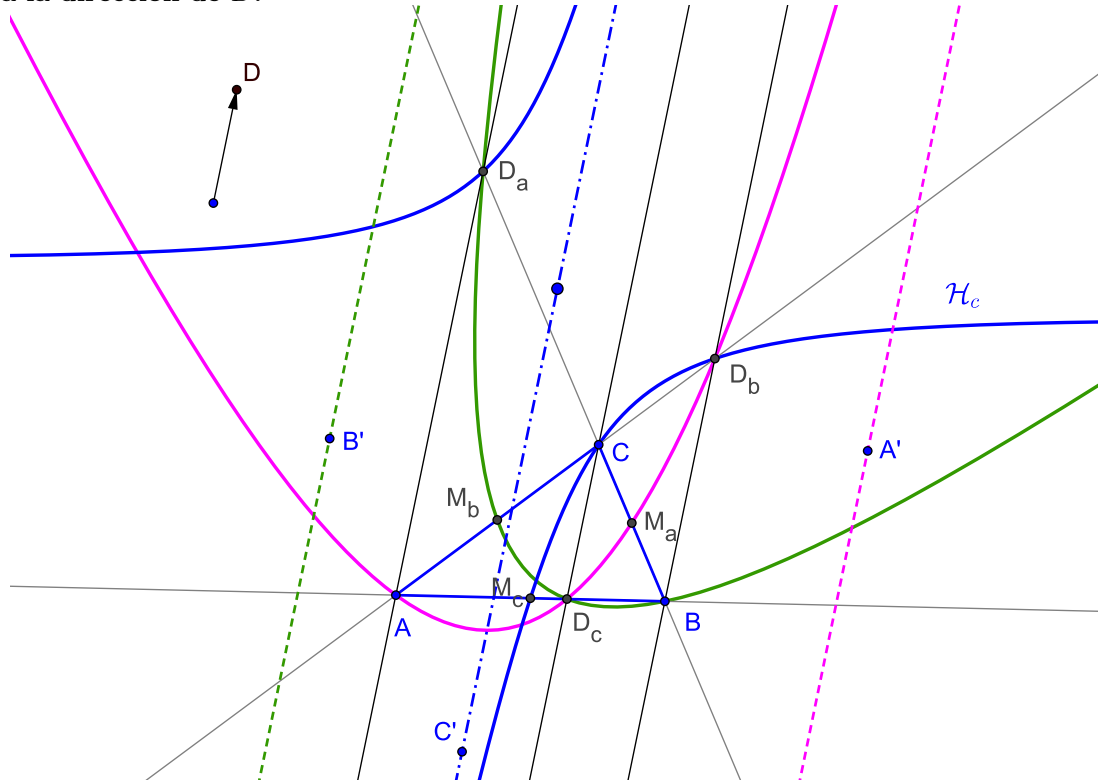
Si D está en el infinito H es el baricentro.

Otros parejas de centros del triángulo (D, H) corresponden a los pares de índices (i, j) , comprendidos entre 1 y 8050, son:

$(1, 1255)$, $(2, 2)$, $(4, 275)$, $(6, 3108)$, $(8, 333)$, $(69, 1799)$, $(4440, 6634)$.

Designamos por h'_a, h'_b y h'_c , respectivamente, las asíntotas de las hipérbolas $\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b$ y $\mathcal{H}_c$, no paralelas a los lados de ABC .

Las asíntotas h'_a, h'_b y h'_c son concurrentes sólo cuando D está en el infinito, siendo en este caso paralelas a la dirección de D .



Descargar archivo GeoGebra

El triángulo delimitado por las asíntotas h'_a, h'_b y h'_c es perspectivo con ABC si D está sobre la cúbica de ecuación baricéntrica:

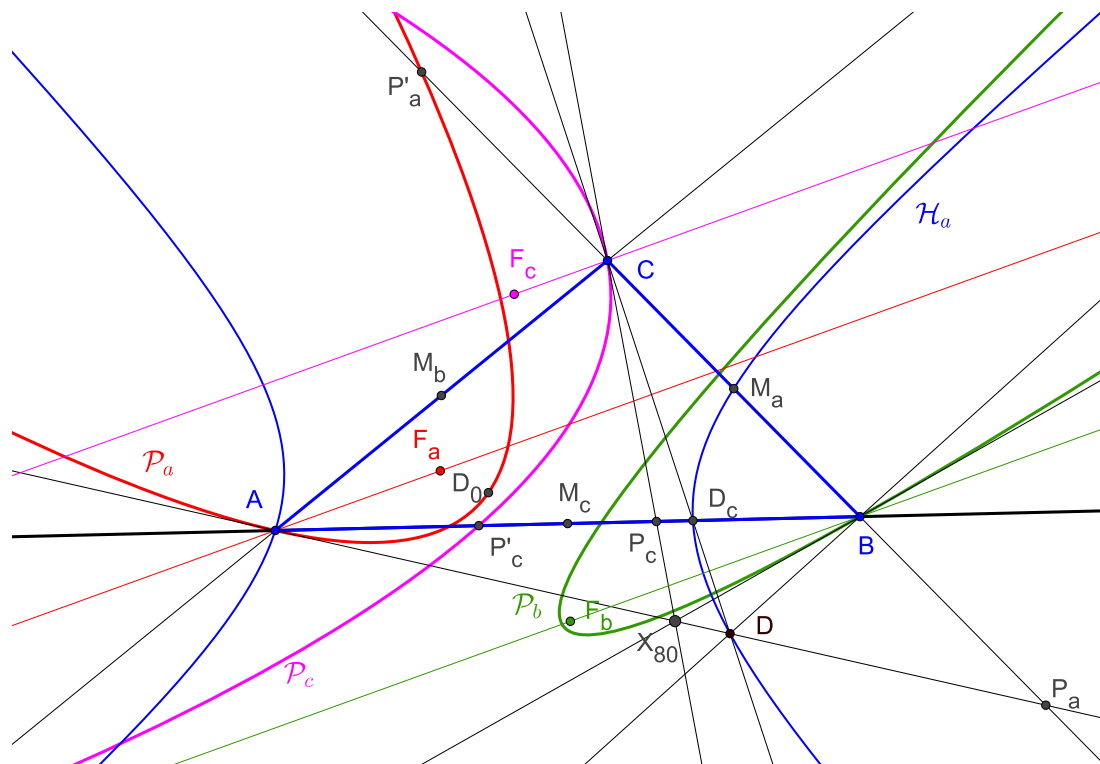
$$3x^3 + 7x^2y + 7xy^2 + 3y^3 + 7x^2z + 13xyz + 7y^2z + 7xz^2 + 7yz^2 + 3z^3 = 0.$$

Las asíntotas de esta cúbica son las reflexiones de los lados de ABC en los vértices opuestos.

Si el punto D varía sobre una recta ℓ que pasa por A , el lugar geométrico de los centros de las correspondientes hipérbolas $\mathcal{H}_a$ es la parábola $\mathcal{P}_a$, tangente en A a ℓ , que pasa por el simétrico del punto $BC \cap \ell$, respecto al punto medio de BC , y cuyo eje es paralelo a BC .

En particular, tomamos las cevianas del simétrico del incentro respecto al punto de Feuerbach, X_{80} , consideramos las parábolas $\mathcal{P}_a, \mathcal{P}_b$ y $\mathcal{P}_c$. Denotemos por F_a, F_b y F_c sus correspondientes focos, entonces:

Las rectas AF_a, BF_b y CF_c son paralelas a la dirección del centro X_{900} .



Descargar archivo GeoGebra