Pr. Cabri 752, propuesto por García Capitán, F. J. (2015)

Enunciado

Sean ABC un triángulo y D un punto. Sea M el punto medio de BC y, para cada punto X sobre BC, sea X' su simétrico respecto de M, y P el punto de intersección de las rectas AX y DX'.

1. Demostrar que el lugar geométrico de P al variar X sobre BC es una cónica, salvo en algún caso.
2. Hallar los puntos del infinito de la cónica y el lugar geométrico de D para que la cónica sea una hipérbola equilátera.
3. Hallar el lugar geométrico de los centros de esas hipérbolas equiláteras.

Solución (César Beade Franco)

I. Consideremos el triángulo ABC con A(a,b), B(-1,0) y C(1,0). El punto M será (0,0), X(t,0) que varía en BC y su simétrico respecto a M, X'(-t,0).
Calculamos el punto de corte de las rectas AX y DX', obteniendo P$\left(\frac{t\,(q\,(a-t)+b\,(p+t))}{q\,(-a+t)+b\,(p+t)},\ \frac{2\,b\,q\,t}{q\,(-a+t)+b\,(p+t)}\right)$, que se puede considerar la ecuación paramétrica del lugar descrito por P.
Eliminado t se puede obtener la ecuación implícita $(q\,x + a\,(q - y))\,y + b\,x\,(-2\,q + y) - p\,y\,(-b + y) = 0$ que es la de una cónica al tener grado 2.

Su matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b+q}{2} & -b\,q \\ \frac{b+q}{2} & -a-p & \frac{1}{2}\,(b\,p+a\,q) \\ -b\,q & \frac{1}{2}\,(b\,p+a\,q) & 0 \end{pmatrix}$.

Su invariante proyectivo es $|A| = -\frac{1}{2}\,b\,(b-q)\,q\,(b\,p-a\,q)$ que nos indica que la cónica degenera si D está sobre la recta BC, sobre una paralela a BC por A o sobre AM.
En los demás casos es una hipérbola pues su invariante afín es $a_{11}.a_{22} - a_{12}{}^2 = -\frac{1}{4}\,(b+q)^2 < 0$.
Las asíntotas de esta cónica son $y = \frac{2\,b\,q}{b+q}$ e $y = \frac{(b-q)\,(b\,p-a\,q)}{(a+p)\,(b+q)} + \frac{(b+q)\,x}{(a+p)}$.

II. Observamos que una de ellas, $y = \frac{2\,b\,q}{b+q}$, es siempre paralela a BC. Si la cónica es una hipérbola equilatera, la otra asíntota ha de ser perpendicular a esta lo que ocurre si $p+a = 0$, es decir, si $p = -a$.
A este mismo resultado llegamos calculando el invariante $a_{11} + a_{22} = -a - p$.
D ha de estar situado en una perpendicular a BC simétrica respecto a M a la que pasa por A.

III. Los centros de estas hipérbolas son $Q\left(\frac{a\,(b-q)}{b+q},\ \frac{2\,b\,q}{b+q}\right)$ que solo dependen del parámetro q. Eliminándolo se obtiene la ecuación del lugar geométrico que describen $bx + ay == a\,b$ o bien $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ recta determinada por la proyección de A sobre BC y sobre su perpendicular por M.