Problema 752 de *triánguloscabri*. *Sean ABC un triángulo y D un punto. Sea M el punto medio de BC y, para cada punto X sobre BC, sea X' su simétrico respecto de M, y P el punto de intersección de las rectas AX y DX'.*

1. *Demostrar que el lugar geométrico de P al variar X sobre BC es una cónica, salvo en algún caso.*
2. *Hallar los puntos del infinito de la cónica y el lugar geométrico de D para que la cónica sea una hipérbola equilátera.*
3. *Hallar el lugar geométrico de los centros de esas hipérbolas equiláteras.*

Propuesto por Francisco Javier García Capitán.
Dedicado a la memoria de *José María Pedret*.

Primer apartado

Que el lugar geométrico de P en general es una cónica es una consecuencia inmediata del teorema de Chasles-Steiner, del cual damos aquí una versión simplificada (recordemos que si X es un punto del plano, se representa con X^* el haz de rectas que pasan por X):

Teorema de Chasles-Steiner. *Sean A y B dos puntos distintos y $\varphi : A^* \to B^*$ una homografía entre los haces de rectas A^* y B^* que no es una proyección. Entonces el lugar geométrico de los puntos $\ell \cap \varphi(\ell)$ al variar ℓ en A^* es una cónica que pasa por A y B.*

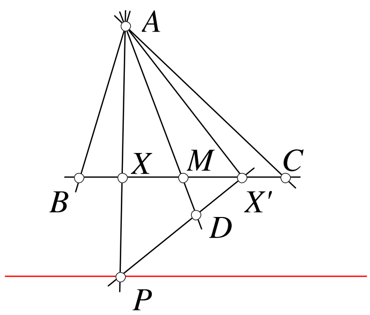
Para que el lugar geométrico sea una cónica, el teorema de Chasles-Steiner exige que la homografía no sea una proyección. Vamos a usar que la homografía $A^* \to B^*$ es una proyección si y solo si la recta BA no es la imagen de AB.

(1) Si D está sobre la recta BC, para cualquier X sobre BC se tendrá que DX' es la misma recta BC y es $P = AX \cap DX' = X$, por lo que el lugar geométrico de P en este caso trivial será la recta BC.

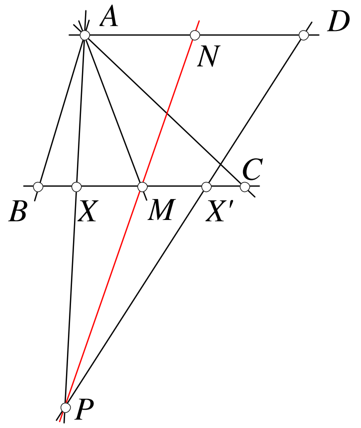
(2) Si D está sobre la recta AM, podemos aplicar el teorema de Menelao al triángulo AXM:

$$\frac{XX'}{X'M} \cdot \frac{MD}{DA} \cdot \frac{AP}{PX} = -1 \Rightarrow \frac{PX}{PA} = \frac{X'X}{X'M} \cdot \frac{DM}{DA} = 2 \cdot \frac{DM}{DA},$$

que es constante. Por tanto, el lugar geométrico de P es una recta.



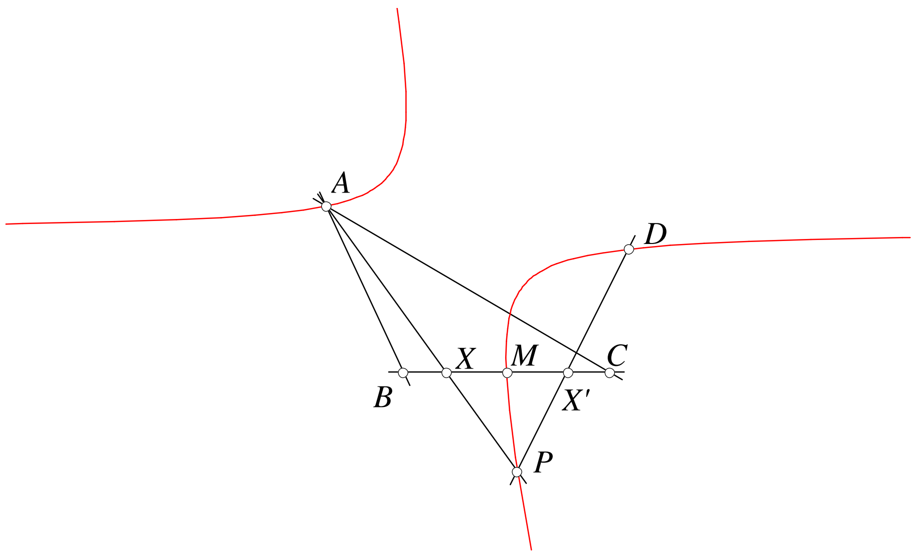
(3) Si D está sobre la paralela a BC por A y N es el punto medio de AD, por ser M el punto medio de XX', los puntos P, M y N están alineados, por lo que el lugar geométrico de P es la recta MN.



En los tres casos anteriores, la imagen de AD por la homografía $AP \to DP$ es la recta DA. Vemos que no hemos obtenido una cónica como lugar geométrico de P.

(4) En los demás casos, la imagen de la recta AD no es la recta DA y por tanto el teorema de Chasles-Steiner nos dice el lugar geométrico de P es una cónica que pasa por A y D.

Además, es ovbio que si $X = M$ entonces $X' = M$ y $P = M$, por lo que M también está sobre la cónica.

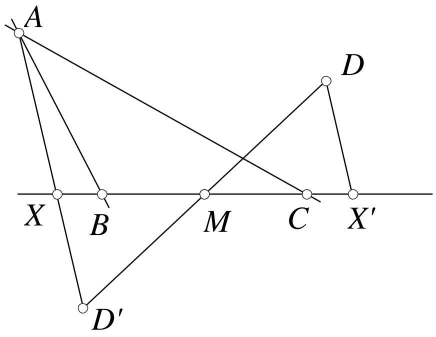


Segundo apartado

Si X es el punto del infinito de la recta BC, tendremos también $X' = X$ y las rectas AX y DX' serán paralelas a BC. Por tanto, el punto del infinito de la recta BC está sobre la cónica.

Ahora, si D' es el punto simétrico de D respecto de M y $X = BC \cap AD'$, es obvio que el simétrico X' estará sobre la paralela a AX por

D y así el punto del infinito de la recta AD' también estará sobre la cónica, que, en general, será una hipérbola.

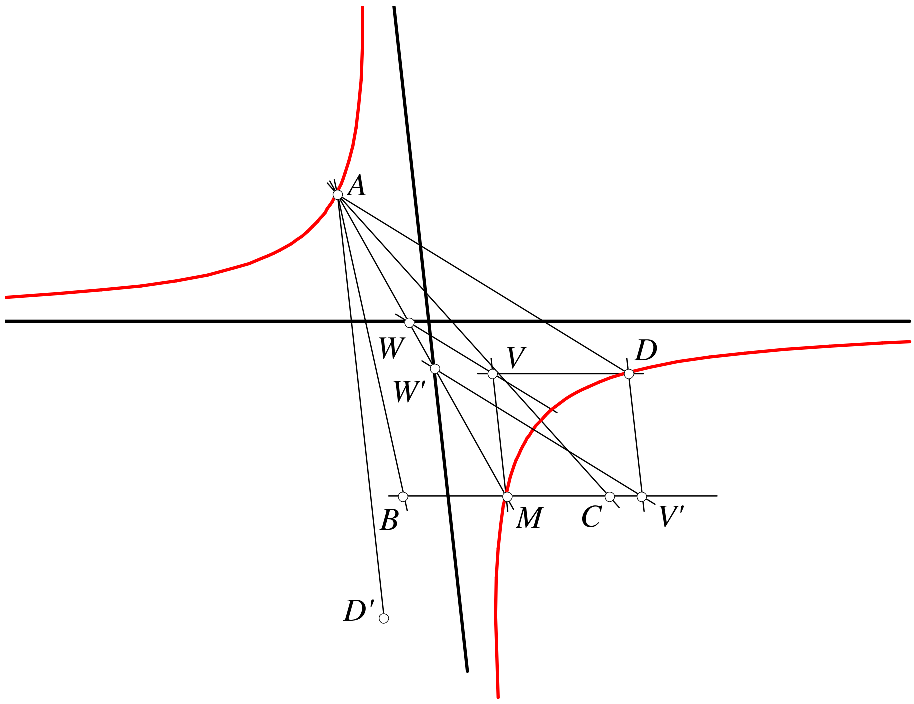


Tracemos las asíntotas de la hipérbola. Sean J y J' los puntos del infinito de las rectas BC y AD'. Para trazar la asíntota paralela a BC tenemos en cuenta que es la tangente a la cónica en el punto J. Apliquemos el teorema de Pascal al hexágono $JJ'MADJ$. Los puntos $U = JJ' \cap AD$, $V = J'M \cap DJ$, $W = MA \cap JJ$ están alineados. Entonces para construir la tangente en J obtenemos los puntos:

$V =$ (paralela por D a BC) $\cap$ (paralela por M a AD')

$W =$ (paralela por V a AD) $\cap$ AM.

Entonces la paralela por W a BC es una de las asíntotas de la hipérbola.



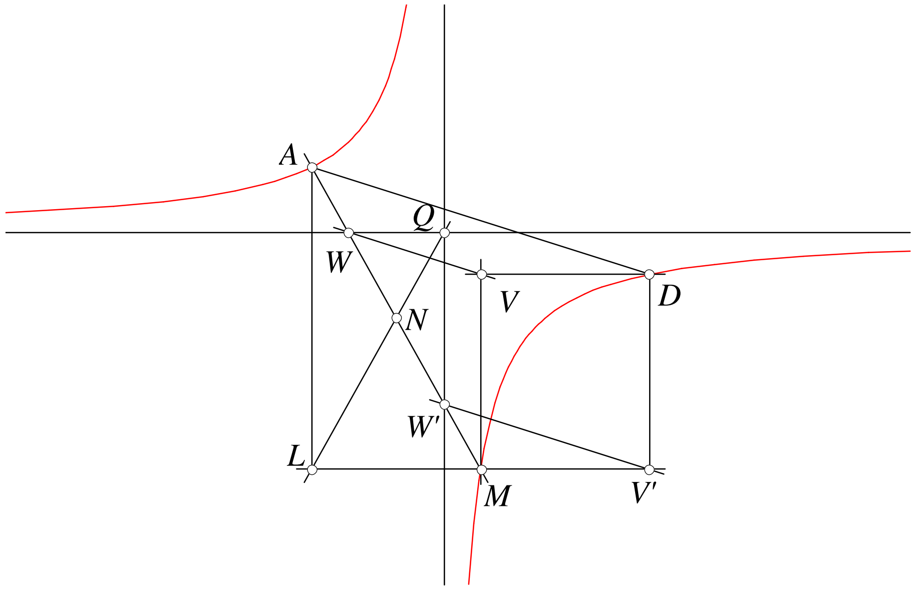
De la misma forma, para trazar la tangente en J' obtenemos los puntos

$V' =$ (paralela por M a BC) $\cap$ (paralela por D a AD')

$W' =$ (paralela por V' a AD) $\cap$ AM.

La paralela por W' a AD' es la otra asíntota de la hipérbola.

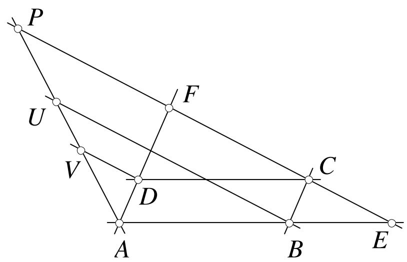
La hipérbola será equilátera cuando la recta AD' sea perpendicular a BC. Como D' es el simétrico de D respecto de M, ello ocurrirá cuando D esté sobre la perpendicular a BC que es simétrica respecto de M de la perpendicular a BC trazada por A.



Tercer apartado

Para hallar el lugar geométrico de los centros Q de estas hipérbolas equiláteras, usamos el siguiente lema:

Lema. *Sean $ABCD$ un paralelogramo y P un punto. Trazamos las paralelas a CP por B y D, que cortan a AP en U y V respectivamente. entonces $PU : UA = AV : VP$.*



Demostración. En efecto, prolongando AB y AD hasta cortar en E y F a CP. Entonces $AV : VP = AD : DF = BC : DF = BE : DC = BE : AB = PU : UA$. □

Aplicando el lema al rectángulo $MV'DV$ y el punto A, deducimos entonces que los puntos W y W' son simétricos respecto del punto medio N de AM. Como consecuencia, si L es el pie de A sobre BC, el triángulo QWW' es la imagen de LMA por una homotecia de centro

N. Por tanto Q, L y N están alineados y el lugar geométrico de Q es la recta LN.

Apéndice

Las soluciones de José María Pedret a los problemas propuestos en el Laboratorio Virtual de Triángulos constituyen una muestra de su profundo conocimiento de la Geometría y de su interés por difundirlo. Como muestra, esta completa solución exponiendo los temas claves de la Geometría Proyectiva:

`http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol137pedcp.pdf`

Estos son algunos conceptos que hemos usado aquí:

Teorema de Pascal. *Si $ABCDEF$ es un hexágono inscrito en una cónica, los puntos $U = AB \cap DE$, $V = BC \cap EF$ y $W = CD \cap FA$ están alineados.*

Trazado de la tangente por un punto a una cónica. *Trazar la tangente por A a la cónica $ABCDE$.*

Aplicando el teorema de Pascal al hexágono $ABCDEA$, sabemos que los puntos $U = AB \cap DE$, $V = BC \cap EA$ y $W = CD \cap AA$ están alineados. Podemos hallar los puntos U y V a partir de A, B, C, D, E. A continuación obtenemos $W = UV \cap CD$ y la recta AW, que será la tangente trazada por A.

Trazado de la hipérbola, conocidos tres puntos y las direcciones de sus asíntotas. *Trazar la hipérbola que pasa por tres puntos A, B, C y que tiene sus asíntotas paralelas a dos rectas r y r'.*

Llamamos J y J' a los puntos del infinito de las rectas r y r'. Lo que queremos es construir puntos X de la cónica $JJ'ABC$. Si usamos Cabri y construimos dos ordinarios más, podremos usar la herramienta para construir una cónica con cinco puntos.

Consideremos la cónica $JJ'ABCX$ donde X es desconocido. Usando el teorema de Pascal, los puntos $U = JJ' \cap BC$, $V = J'A \cap CX$ y $W = AB \cap XJ$ deben estar alineados.

Como J y J' son infinitos, JJ' es la recta del infinito y U es el punto del infinito de la recta BC.

Como X es desconocido, no podemos hallar V, pero como X va a ser un punto arbitrario de la cónica, tomamos como V un punto cualquiera de la recta $J'A$, es decir de la paralela por A a r'.

De esta forma, W queda determinado como la intersección de UV y AB, ya que U, V y W están alineados.

Ahora podemos hallar X como intersección de CV y JW, es decir, la intersección de CV con la paralela por W a la recta r.

Al variar V sobre $J'A$ obtendremos todos los puntos de la cónica.