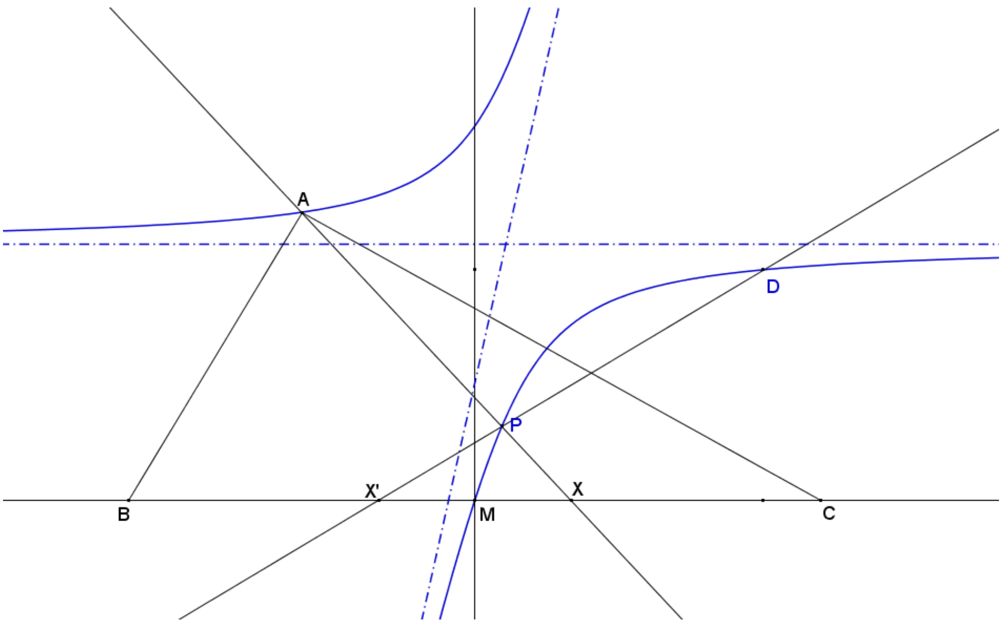
Problema 752
Sean ABC un triángulo y D un punto. Sea M el punto medio de BC y, para cada punto X sobre BC, sea X' su simétrico respecto de M, y P el punto de intersección de las rectas AX y DX'.
1. Demostrar que el lugar geométrico de P al variar X sobre BC es una cónica, salvo en algún caso.
2. Hallar los puntos del infinito de la cónica y el lugar geométrico de D para que la cónica sea una hipérbola equilátera.
3. Hallar el lugar geométrico de los centros de esas hipérbolas equiláteras.
García Capitán, F. J. (2015): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Note liminaire

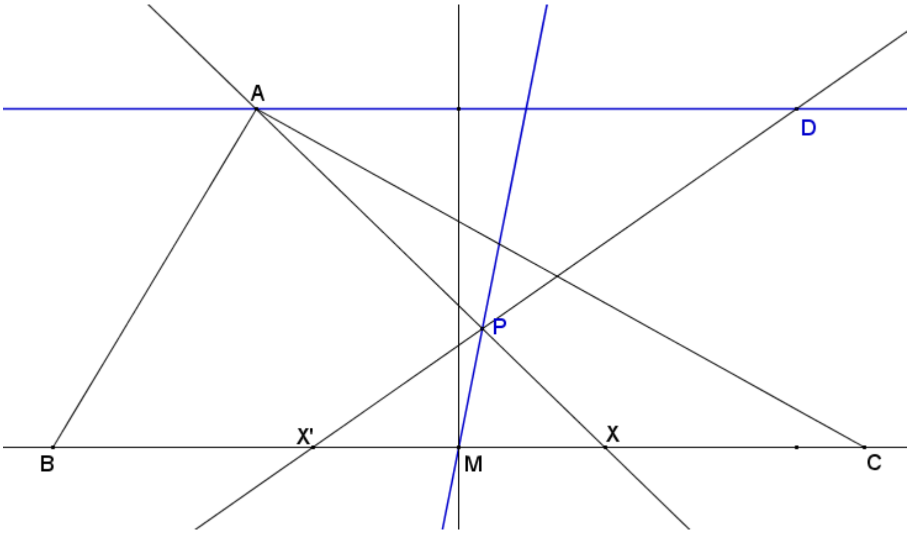
L'équation générale d'une conique dans un repère Oxy est donnée par la relation :
$\mathbf{f(x,y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \lambda = 0.}$
Si $\alpha\gamma - \beta^2 < 0$, la conique est une hyperbole et si $\alpha = -\gamma$, c'est une hyperbole équilatère. Les directions des deux asymptotes sont données par l'équation $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 0$.
Si $\alpha\gamma - \beta^2 = 0$, la conique est une parabole.

Q_1
On prend la droite [BC] comme axe x'Ox des abscisses et le point M milieu de BC pour origine. L'axe des ordonnées y'Oy est donc la perpendiculaire à [BC] passant par M.
On désigne par (a_1,a_2) les coordonnées de A et par (d_1,d_2) celles de D dans le repère précédemment défini. Soit X un point courant sur la droite [BC] d'abscisse x. L'abscisse de X' symétrique de X par rapport à M est $-x$.
L'équation de la droite [AX] est alors : $(a_1 - x)Y = a_2(X - x)$ et celle de la droite [DX'] : $(d_1 + x)Y = d_2(X+ x)$.
Les coordonnées (X,Y) du point P à l'intersection des droites [AX] et [DX'] vérifient les deux équations:
$a_2X - a_1Y = x(d_1 - Y)$ et $d_2X - d_1Y = x(Y - d_2)$.
Après élimination de x, on obtient l'équation du lieu géométrique de P quand X parcourt la droite [BC]:
$\mathbf{(a_1 + d_1)Y^2 - (a_2 + d_2)XY - (a_1d_2 + a_2d_1)Y + 2a_2d_2X = 0}$
En se reportant à l'expression générale d'une conique donnée supra, on a respectivement:
$\alpha = 0$, $\beta = -(a_2 + d_2)/2$, $\gamma = (a_1 + d_1)$, $\delta = 2a_2d_2$, $\varepsilon = -(a_1d_2 + a_2d_1)$ et $\lambda = 0$.
Il en résulte que **dans le cas général où $\beta \neq 0$**, $\alpha\gamma - \beta^2 = -\beta^2 < 0$**, le lieu de P est une hyperbole qui admet deux asymptotes dont l'une est parallèle à l'axe des abscisses**. Voir figure ci-après:

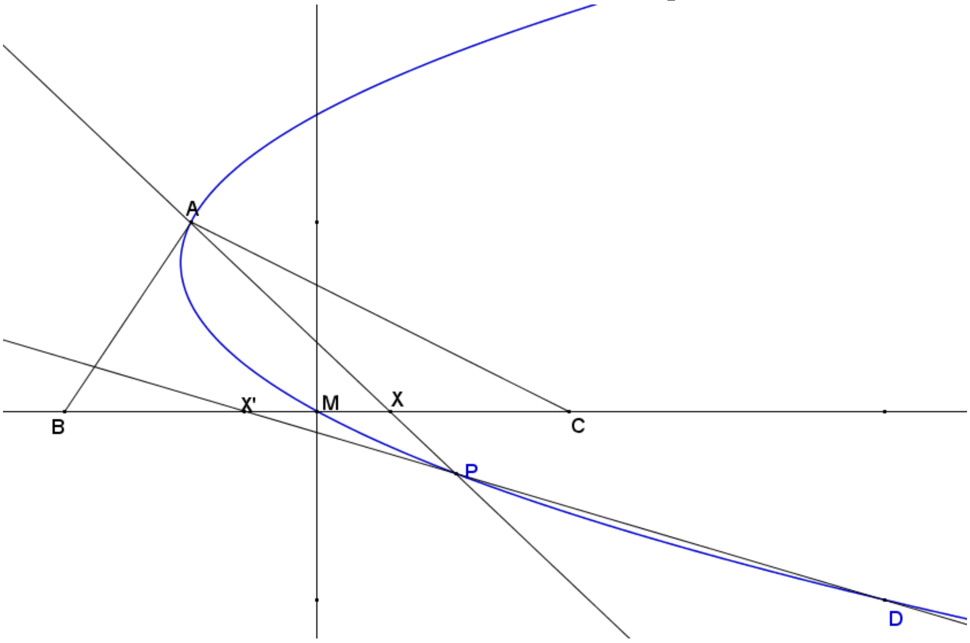


De manière plus précise, les équations de ce deux asymptotes sont:
$Y = 2a_2d_2/(a_2+ d_2)$
et
$(a_1 + d_1)Y - (a_2 + d_2)X = (a_2 - d_2)(a_2d_1 - a_1d_2)/(a_2 + d_2)$
Le centre de l'hyperbole est à l'intersection de ces deux droites.

Si $a_2 = d_2$, **le point D a la même ordonnée que le point A et se trouve donc sur la parallèle menée par A à la droite [BC].** L'hyperbole est dégénérée en **ses deux asymptotes** qui sont deux droites d'équations $Y = 2a_2$ et $(a_1 + d_1) Y - 2a_2X = 0$. Voir figure ci-après:



Si $\beta = 0$ soit $a_2 + d_2 = 0$ ou $d_2 = -a_2$, **l'ordonnée de D est donc l'opposé de celle de A et le lieu de P est une parabole** d'équation $\mathbf{(a_1 + d_1)Y^2 - a_2(d_1 - a_1)Y - 2a_2^2X = 0}$.Voir figure ci-après:



Enfin si **le point D est le symétrique de A par rapport à M**, les droites [AX] et [DX'] sont parallèles et se rencontrent en le point **P rejeté à l'infini**.

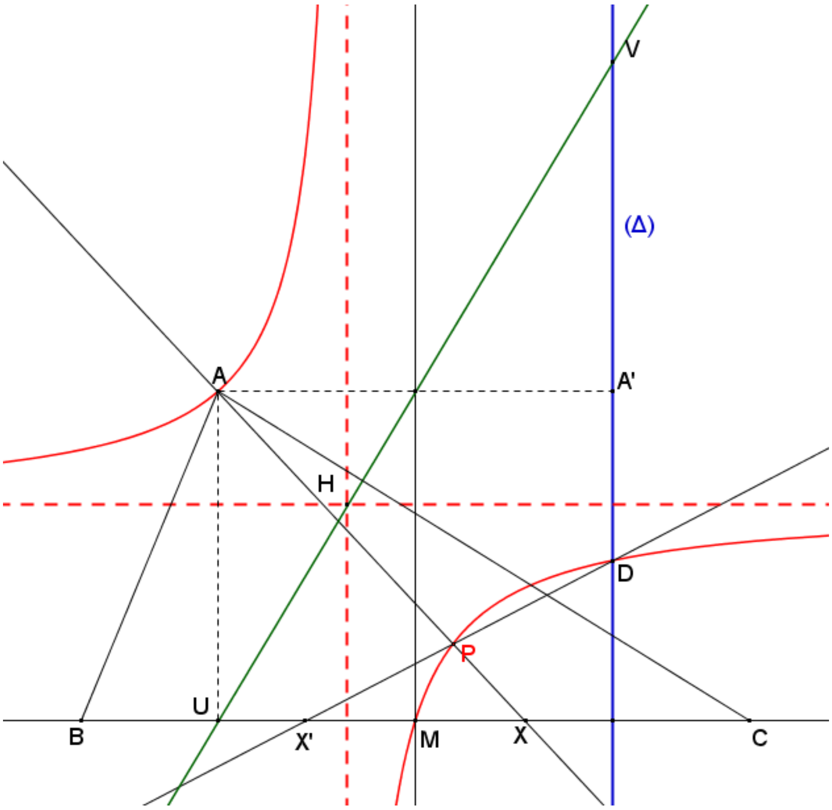
Q_2

Le lieu de P est une hyperbole équilatère si et seulement si le coefficient α de X^2 est l'opposé du coefficient γ de Y^2. Ici $\alpha = 0$. d'où $\gamma = 0$, ce qui entraine $a_1 + d_1 = 0$ soit $d_1 = -a_1$

L'hyperbole équilatère a alors pour équation $\mathbf{(a_2 + d_2)XY - a_1(d_2 - a_2)Y + 2a_2d_2X = 0}$ et ses deux asymptotes parallèles aux axes des abscisses et des ordonnées ont respectivement pour équations :

$\mathbf{Y = 2a_2d_2/(a_2 + d_2)}$ et $\mathbf{X = a_1(d_2 - a_2)/(a_2 + d_2)}$ qui sont les coordonnées du centre H de l'hyperbole.

Le lieu géométrique de D tel que le lieu de P est une hyperbole équilatère est **donc la droite Δ parallèle à l'axe des ordonnées et d'équation $Y = -a_1$**.Voir figure ci-après:



Q_3

A partir des coordonnées du point H : $\mathbf{Y = 2a_2d_2/(a_2+ d_2)}$ et $\mathbf{X = a_1(d_2 - a_2)/(a_2+ d_2)}$, après élimination de la variable d_2, on déduit, quand D parcourt (Δ), le lieu de H qui a pour équation $a_2X + a_1Y = a_1a_2$. On obtient l'équation d'une droite passant par les points U et V de coordonnées respectives $(a_1,0)$ et $(- a_1,2a_2)$. Voir figure ci-dessus.
On vérifie que H parcourt bien la totalité de la droite [UV]. Le segment UV est parcouru quand les ordonnées de A et de D sont de même signe et le reste de la droite [UV] à l'exclusion de ce segment est parcouru quand les ordonnées de A et de D sont de signes contraires.

Nota Bene: Si le point M se déplace exclusivement à l'intérieur du côté BC du triangle ABC et non sur la totalité de la droite [BC], il suffit de retenir **les arcs d'hyperbole et de parabole ou le segment de droite** décrits par le point P. Les extrémités de ces arcs ou de ce segment sont déterminés quand le point X est situé aux extrémités du segment BC.