Dedicado a la memoria de José María Pedret.

Problema 752.- *Sean ABC un triángulo y D un punto. Sea M el punto medio de BC y, para cada punto X sobre BC, sea X' su simétrico respecto de M, y P el punto de intersección de las rectas AX y DX'.*

1. *Demostrar que el lugar geométrico de P al variar X sobre BC es una cónica, salvo en algún caso.*

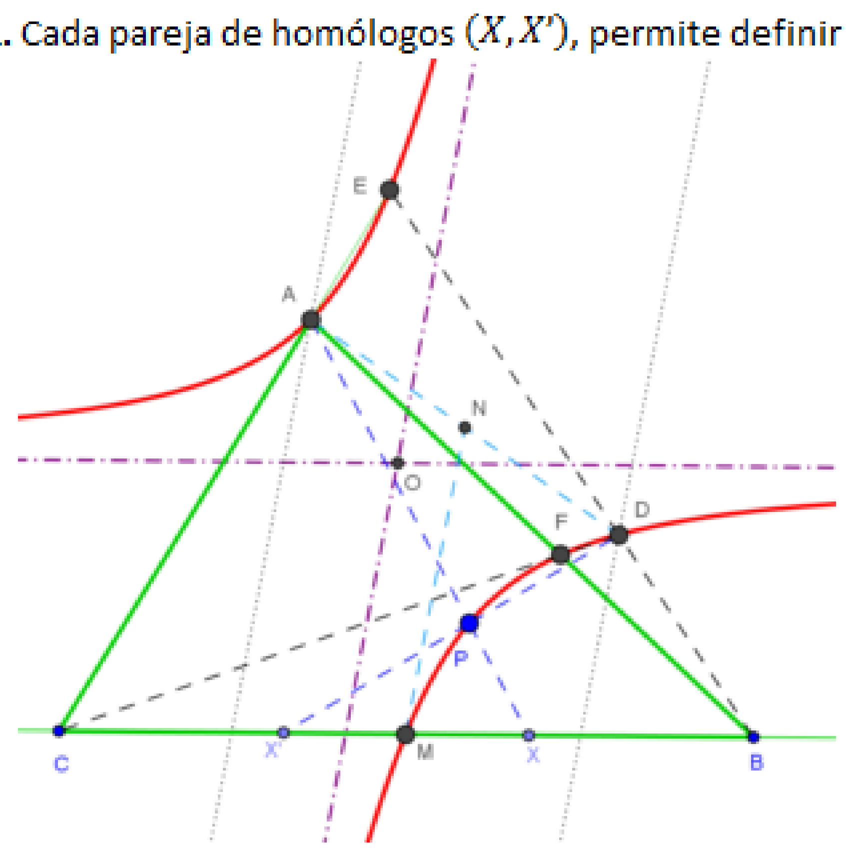
2. *Hallar los puntos del infinito de la cónica y el lugar geométrico de D para que la cónica sea una hipérbola equilátera.*

3. *Hallar el lugar geométrico de los centros de esas hipérbolas equiláteras.*

García Capitán, F.J. (2015): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

1. Cada pareja de homólogos (X, X'), permite definir una correspondencia entre los haces de rectas A^* y D^*que pasan por A y D



. Dado que la simetría es una involución si $P = AX \cap DX'$ es un punto del lugar, también lo es $Q = AX' \cap DX$. Esta correspondencia es claramente una proyectividad u homografía entre esos haces. Los puntos de intersección de los pares homólogos (AX, DX') definen una cónica. Así pues el lugar geométrico buscado es una cónica. Los vértices de esos haces, puntos A y D, son también puntos del lugar. Por su definición también M es un punto del mismo.

Si N es el punto medio de AD y tomamos AX paralela a MN, la homóloga DX' también es paralela a ellas. Así pues hay puntos en el infinito. Otro punto en el infinito se obtiene cuando la recta AX es paralela a BC pues su homóloga también lo es.

B y C son simétricos respecto de M, por tanto sus proyecciones desde D sobre AC y AB, (puntos E y F) son puntos del lugar. Con esto hemos conseguido cinco puntos de esta cónica que permiten su construcción (y otros dos en el infinito).

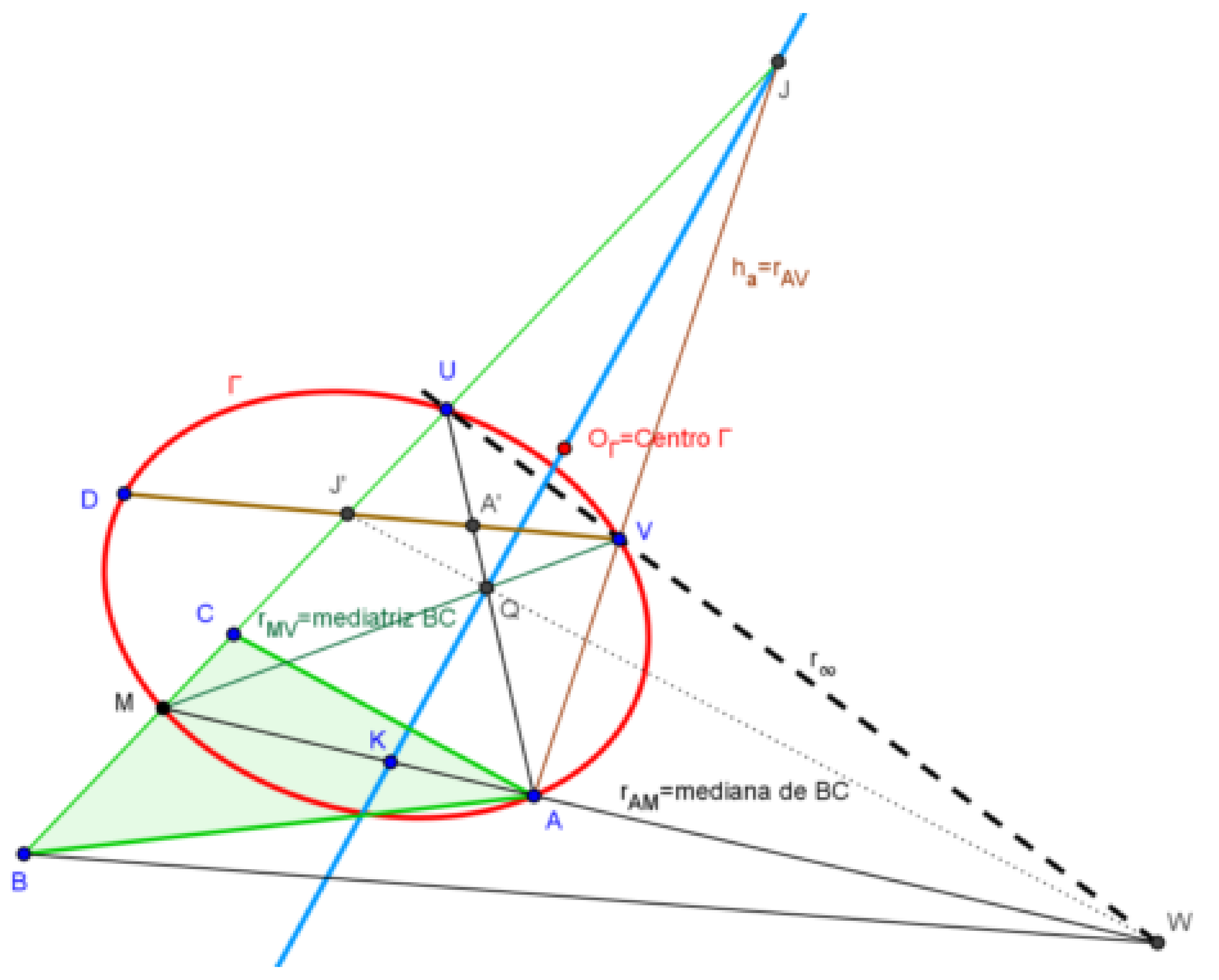
Cuando el punto D está sobre la mediana de A, está cónica degenera en un par de rectas (A, D y M están alineados), una de ellas la propia mediana y la otra, la paralela definida por las proyecciones de B y C desde D sobre AC y AB respectivamente. También degenera cuando D está sobre la paralela a BC por A; en este caso están alineados tres puntos de la cónica: A, D y U, uno sus puntos del infinito y cuando D está sobre BC, los alineados son E, F, D y M.

2. Esta cónica es una hipérbola, pues hay pares de rectas homólogas que no se cortan. Ya hemos visto que hay una asíntota paralela al lado BC y otra con la misma dirección que MN.

Para que la hipérbola sea equilátera han de ser perpendiculares sus asíntotas. Una de ellas es siempre paralela al lado BC, tenemos que encontrar un punto D para el cual la otra asíntota sea perpendicular a BC. Esto parece sencillo. Se toma X en el pie de la altura desde A, punto J. Después tomamos su simétrico J', respecto de M. Pues bien, bastará tomar D sobre la perpendicular a BC por J' para tener una asíntota perpendicular a ese lado y por tanto, una hipérbola equilátera.

Resumiendo: **el lugar geométrico de D, para el cual las hipérbolas resultantes son equiláteras es la recta perpendicular al lado BC por el punto J' (simétrico del pie de la altura h_a).**

3. Las hipérbolas equiláteras que hemos descrito antes son cónicas que tienen en común los puntos del infinito. Sean éstos U y V, y sea W el punto del infinito de la mediana AM. Son cónicas del haz de las que pasan por los puntos A, M, U y V.



Las rectas MU, MA, AV y UV definen un cuadrilátero completo cuyo triángulo diagonal es JQW. Por tanto, la polar de W es la recta $w = JQ$ y, en consecuencia, el polo de VW (la recta del infinito) ha de estar sobre JQ. Dicho de otro modo: El centro de una cónica del haz definido por A, M, U y V está en JQ. Sea K el punto de intersección de las rectas AM y $w = \text{Polar}(W)$. Como la cuaterna $(MAKW)$ es armónica (por definición de polar) y W está en el infinito, deducimos que K es el punto medio de AM y por tanto, la polar de W es el diámetro conjugado con la dirección definida por la mediana. Y este es el lugar geométrico buscado.

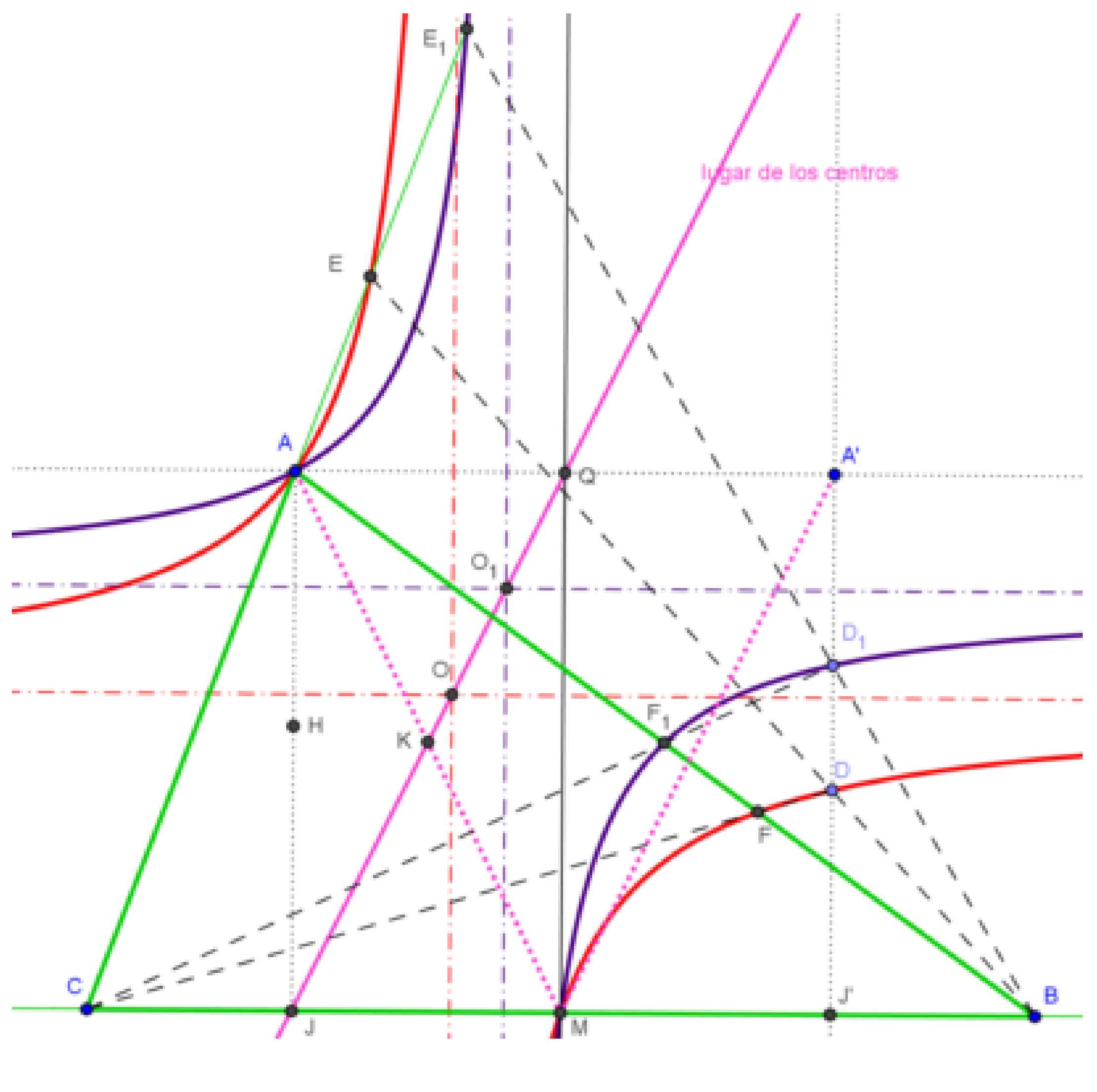
La construcción completa de la figura es como sigue: La polar de J es WQ y por eso, la proyección de Q sobre BC desde W nos da J' que es el cuarto armónico de la terna (MUJ) y eso significa que J y J' son simétricos respecto de M. La proyección desde V sobre AU de la cuaterna armónica $(MUJJ')$ sirve para definir A' como el simétrico de A respecto de la mediatriz MV, ya que $(QUAA') = -1$ y con ello a Q como el punto medio de AA'.

D se toma sobre la "*vertical*" $A'J'$ y con él ya queda construida una cónica concreta Γ.

El lugar geométrico de los centros de las hipérbolas equiláteras es el diámetro conjugado de la mediana AM.

Si se desea llegar a esta conclusión más rápidamente, aunque de forma menos geométrica, se puede proceder como se describe a continuación.

Supongamos unos ejes de coordenadas con origen en M y con el lado BC como eje de abscisas, una de tales hipérbolas rectangulares, aquella cuyo centro es $O = (h, k)$ se expresa mediante la ecuación $(x-h)(y-k) = cte.$



Si pasa por el origen, punto M y por $A = (a_1, a_2)$, obtenemos que la constante de la ecuación es hk, y que se ha de verificar la ecuación

$$a_2 h + a_1 k = a_1 a_2,$$

o dicho de otro modo, el centro de la hipérbola equilátera es un punto de la recta

$$a_2 x + a_1 y = a_1 a_2$$

Esa recta tiene pendiente opuesta a la de la mediana AM, es por consiguiente de dirección igual a la simétrica de ella respecto de la mediatriz de BC (eje OY). Pasa por el punto $J = (a_1, 0)$. ■