Problema 753.-

Sobre un ángulo de 60º (VI)

Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con AB<AC. Sean B2 y C2 los pies de la bisectriz de los ángulos B y C sobre los lados AC y AB respectivamente. $\frac{BB_2}{CC_2}=\frac{AB}{AC}$ si y sólo si <A=60º.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

$(\Rightarrow)\ \frac{BB_2}{CC_2}=\frac{AB}{AC}.$

Considerando los triángulos ABB_2 y ACC_2, tenemos que $\frac{BB_2}{AB}=\frac{\sin A}{\sin(\frac{1}{2}B+C)}\ \ y\ \ \frac{CC_2}{AC}=\frac{\sin A}{\sin(\frac{1}{2}C+B)}$.

Por tanto,

$$\frac{BB_2}{CC_2}=\frac{AB\cdot sinA\cdot\sin(\frac{1}{2}B+C)}{AC\cdot sinA\cdot\sin(\frac{1}{2}C+B)}=\frac{AB\cdot\sin(\frac{1}{2}B+C)}{AC\cdot\sin(\frac{1}{2}C+B)}=(hip)=\frac{AB}{AC}\Rightarrow 1=\frac{\sin(\frac{1}{2}B+C)}{\sin(\frac{1}{2}C+B)}\Rightarrow \sin\sin\left(\frac{1}{2}B+C\right)=\sin(\frac{1}{2}C+B)$$

A partir de esta igualdad obtenida,

$$\sin\left(\frac{1}{2}\mathrm{B}+\mathrm{C}\right)=\sin\left(\frac{1}{2}\mathrm{C}+\mathrm{B}\right)$$

pueden presentarse dos casos:

Caso 1.-

$\frac{B}{2}+\mathrm{C}=\frac{\mathrm{C}}{2}+\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{B}=\mathrm{C}$ (Absurdo), ya que el triángulo es escaleno.

Caso 2.-

$\frac{B}{2}+\mathrm{C}=180º-\frac{\mathrm{C}}{2}-\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{B}+\mathrm{C}=120º\rightarrow\mathrm{A}=60º \quad cqd$ ■

$(\Leftarrow)\ A=60º.$

En los triángulos CBB_2 y BCC_2, tenemos que:

$$\frac{BB_2}{sinC}=\frac{a}{\sin(\frac{1}{2}B+60º)}\,y\,\frac{CC_2}{sinB}=\frac{a}{\sin(\frac{1}{2}C+60º)}\rightarrow\frac{BB_2\cdot sinB}{CC_2\cdot sinC}=\frac{\sin(\frac{1}{2}B+60º)}{\sin(\frac{1}{2}C+60º)}.$$

Ahora bien, como $\frac{sinB}{sinC}=\frac{b}{c}$, bastará probar que:

$$\frac{\sin(\frac{1}{2}B+60º)}{\sin(\frac{1}{2}C+60º)}=1\rightarrow\sin\sin\left(\frac{1}{2}B+60º\right)-\sin\sin\left(\frac{1}{2}C+60º\right)=0.$$

Y esto es cierto, ya que:

$$\sin\left(\frac{1}{2}B+60º\right)-\sin\left(\frac{1}{2}C+60º\right)=2\cdot\sin 180º\cdot\cos\cos\left(\frac{1}{2}(B-C)\right)=0$$

$$\frac{BB_2}{CC_2}=\frac{c}{b}=\frac{AB}{AC},\ \ cqd\ \ ■$$