

## Problema 753

Sobre un ángulo de  $60^\circ$  (VI)

Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con  $AB < AC$

Sean B<sub>2</sub> y C<sub>2</sub> los pies de la bisectriz de los ángulos B y C sobre los lados AC y AB respectivamente. [Actualizado el 16 de Noviembre por un despiste avisado por el profesor Peiró, a quien agradezco la gentileza]

Es  $(BB_2/CC_2) = (AB/AC)$  si y sólo si  $\angle A = 60^\circ$ .

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Sea  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $\angle C = 120^\circ - \beta$ .

El triángulo  $ABB_2$  tiene de ángulos  $60^\circ$ ,  $\beta/2$ ,  $120^\circ - (\beta/2)$

Por el teorema del seno es  $\frac{AB}{BB_2} = \frac{\sin(120^\circ - (\beta/2))}{\sin 60^\circ}$

El triángulo  $ACC_2$  tiene de ángulos  $60^\circ$ ,  $60^\circ - (\beta/2)$ ,  $60^\circ + (\beta/2)$ .

Por el mismo teorema es  $\frac{AC}{CC_2} = \frac{\sin(60^\circ + (\beta/2))}{\sin 60^\circ}$

Así lo que hemos de ver es que  $\sin\left(120^\circ - \left(\frac{\beta}{2}\right)\right) = \sin\left(60^\circ + \left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$

Lo que es cierto por ser complementarios.

Supongamos ahora que es cierto que  $(BB_2/CC_2) = (AB/AC)$ .

Así al ser  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  los ángulos de ABC, los ángulos de

$ABB_2$  serán  $\alpha$ ,  $\beta/2$ ,  $\gamma + (\beta/2)$ ,

Y es  $\frac{AB}{AB_2} = \frac{\sin(\gamma + (\frac{\beta}{2}))}{\sin \alpha}$

Los ángulos del triángulo  $ACC_2$  serán  $\alpha$ ,  $\gamma/2$ ,  $\beta + (\gamma/2)$

Así es  $\frac{AC}{AC_2} = \frac{\sin(\beta + (\frac{\gamma}{2}))}{\sin \alpha}$

Por ser iguales ambas expresiones, ha de ser o

1.-  $\gamma + (\beta/2) = \beta + (\gamma/2)$ , es decir,  $\beta = \gamma$ , y sería isósceles, lo que hemos descartado en la hipótesis del enunciado.

2.-  $(\gamma + (\beta/2)) + (\beta + (\gamma/2)) = 180^\circ$ , lo que implica  $\gamma + \beta = 120^\circ$ , y por último  $\alpha = 60^\circ$ , cqd.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado. Sevilla.

