

Problema 753

Siga $\triangle ABC$ un triangle acutangle i escalè amb $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Siguen B_2 i C_2 els peus de les bisectrius dels angles B i C , sobre els costats $\overline{AC}$ i

$\overline{AB}$, respectivament. Aleshores, $\frac{\overline{BB_2}}{\overline{CC_2}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ si i només si $A = 60^\circ$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicació personal

Solució: Ricard Peiró:

($\Rightarrow$)

Suposem $\frac{\overline{BB_2}}{\overline{CC_2}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $B_2\triangle A$: $\frac{\overline{BB_2}}{\sin A} = \frac{c}{\sin\left(\frac{B}{2} + A\right)}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $CC_2\triangle A$: $\frac{\overline{CC_2}}{\sin A} = \frac{b}{\sin\left(\frac{C}{2} + A\right)}$.

Dividint ambdues expressions: $\frac{\overline{BB_2}}{\overline{CC_2}} = \frac{c}{b} \frac{\sin\left(\frac{C}{2} + A\right)}{\sin\left(\frac{B}{2} + A\right)}$. Aleshores:

$\sin\left(\frac{C}{2} + A\right) = \sin\left(\frac{B}{2} + A\right)$, $B \neq C$. Aleshores, $\frac{C}{2} + A = 180^\circ - \left(\frac{B}{2} + A\right)$.

$\frac{B+C}{2} = 180^\circ - 2A$. $90^\circ - \frac{A}{2} = 180^\circ - 2A$. Resolent l'equació: $A = 60^\circ$.

($\Leftarrow$)

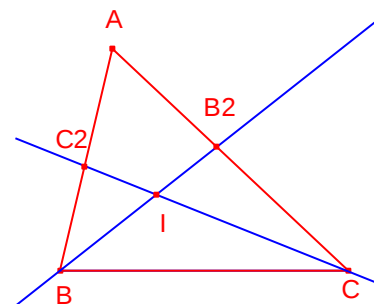
Suposem que $A = 60^\circ$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $B_2\triangle A$: $\frac{\overline{BB_2}}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin\left(\frac{B}{2} + 60^\circ\right)}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $CC_2\triangle A$: $\frac{\overline{CC_2}}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin\left(\frac{C}{2} + 60^\circ\right)}$.

Dividint ambdues expressions: $\frac{\overline{BB_2}}{\overline{CC_2}} = \frac{c}{b} \frac{\sin\left(\frac{C}{2} + 60^\circ\right)}{\sin\left(\frac{B}{2} + 60^\circ\right)}$.

Notem que $\frac{C}{2} + 60^\circ + \frac{B}{2} + 60^\circ = 180^\circ$. Aleshores, $\sin\left(\frac{C}{2} + 60^\circ\right) = \sin\left(\frac{B}{2} + 60^\circ\right)$.



Per tant, $\frac{\overline{BB_2}}{\overline{CC_2}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.