

Problema 753

Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo y escaleno con $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Sean B_2 i C_2 los pies de las bisectrices de los ángulos B y C, sobre los lados $\overline{AC}$ y

$\overline{AB}$, respectivamente. Entonces, $\frac{\overline{BB_2}}{\overline{CC_2}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ si sólo si $A = 60^\circ$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal

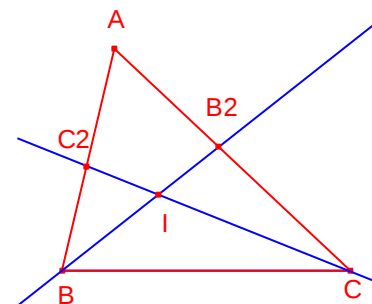
Solución: Ricard Peiró:

($\Rightarrow$)

Supongamos $\frac{\overline{BB_2}}{\overline{CC_2}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo B_2A :

$$\frac{\overline{BB_2}}{\sin A} = \frac{c}{\sin\left(\frac{B}{2} + A\right)}.$$



Aplicando el teorema de los senos al triángulo CC_2A : $\frac{\overline{CC_2}}{\sin A} = \frac{b}{\sin\left(\frac{C}{2} + A\right)}.$

Dividiendo ambas expresiones: $\frac{\overline{BB_2}}{\overline{CC_2}} = \frac{c}{b} \frac{\sin\left(\frac{C}{2} + A\right)}{\sin\left(\frac{B}{2} + A\right)}$. Entonces:

$$\sin\left(\frac{C}{2} + A\right) = \sin\left(\frac{B}{2} + A\right), B \neq C. \text{ Entonces, } \frac{C}{2} + A = 180^\circ - \left(\frac{B}{2} + A\right).$$

$$\frac{B+C}{2} = 180^\circ - 2A. \quad 90^\circ - \frac{A}{2} = 180^\circ - 2A. \text{ Resolviendo la ecuación: } A = 60^\circ.$$

($\Leftarrow$)

Supongamos que $A = 60^\circ$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo B_2A : $\frac{\overline{BB_2}}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin\left(\frac{B}{2} + 60^\circ\right)}.$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo CC_2A : $\frac{\overline{CC_2}}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin\left(\frac{C}{2} + 60^\circ\right)}.$

Dividiendo ambas expresiones: $\frac{\overline{BB_2}}{\overline{CC_2}} = \frac{c}{b} \frac{\sin\left(\frac{C}{2} + 60^\circ\right)}{\sin\left(\frac{B}{2} + 60^\circ\right)}.$

Notemos que $\frac{C}{2} + 60^\circ + \frac{B}{2} + 60^\circ = 180^\circ$. Entonces, $\sin\left(\frac{C}{2} + 60^\circ\right) = \sin\left(\frac{B}{2} + 60^\circ\right).$

Por tanto, $\frac{\overline{BB_2}}{\overline{CC_2}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.