

Problema 753

Sobre un ángulo de 60° (VI)

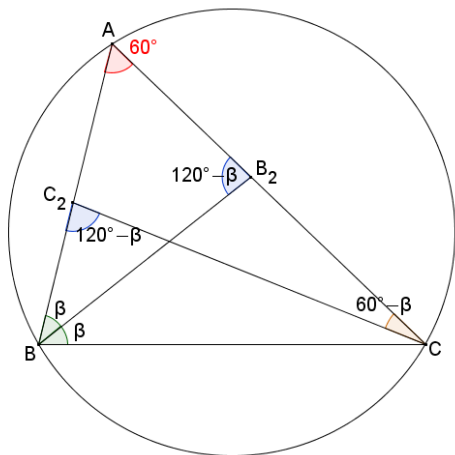
Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con $AB < AC$

Sean B_2 y C_2 los pies de la bisectriz del ángulo A sobre el lado BC .

Es $(BB_2/CC_2)=(AB/AC)$ si y sólo si $\angle A=60^\circ$.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Si l'angle $\angle BAC = 60^\circ$, alors $BB_2 / CC_2 = AB / AC$



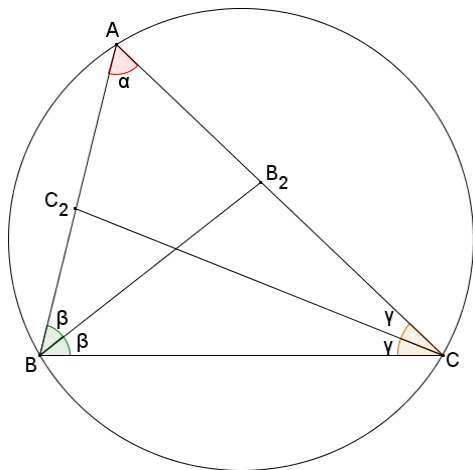
On pose $\angle ABB_2 = \beta$. On en déduit $\angle AB_2B = \angle BC_2C = 120^\circ - \beta$.

D'où $AB / BB_2 = \sin(120^\circ - \beta) / \sin(60^\circ)$ et $AC / CC_2 = \sin(\angle AC_2C) / \sin(60^\circ)$

Or $\angle AC_2C = 180^\circ - \angle BC_2C$. Donc $\sin(\angle AC_2C) = \sin(\angle BC_2C) = \sin(120^\circ - \beta)$

Il en résulte $AB / BB_2 = AC / CC_2$, soit $BB_2 / CC_2 = AB / AC$

Si $BB_2 / CC_2 = AB / AC$ alors $\angle BAC = 60^\circ$



On pose $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABB_2 = \beta$ et $\angle ACC_2 = \gamma$.

On a par hypothèse $AB / AC = BB_2 / CC_2$ soit $AB / BB_2 = AC / CC_2$

D'après la loi des sinus dans un triangle, on en déduit :

$\sin(\beta + 2\gamma) / \sin(\alpha)$ et $\sin(2\beta + \gamma) / \sin(\alpha)$.

D'où $\sin(\beta + 2\gamma) = \sin(2\beta + \gamma)$

Deux cas sont possibles:

1) $\beta + 2\gamma = 2\beta + \gamma \implies \beta = \gamma$. Le triangle est isocèle. Contradiction avec ABC scalène.

2) $\beta + 2\gamma = 180^\circ - (2\beta + \gamma) \implies \beta + \gamma = 60^\circ$.

D'où $\alpha = 180^\circ - 2(\beta + \gamma) = 60^\circ$ Cqfd.