

Problema 754.-

Sobre un ángulo de 60° (VII)

Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con $AB < AC$.

Sea O el circuncentro. Sea H el ortocentro. Sea B_3 el pie de la altura de B sobre el lado AC .

Demostrar que $\angle BAC = 60^\circ$ si y sólo si la recta de Euler es bisectriz del ángulo $\angle CHB_3$.

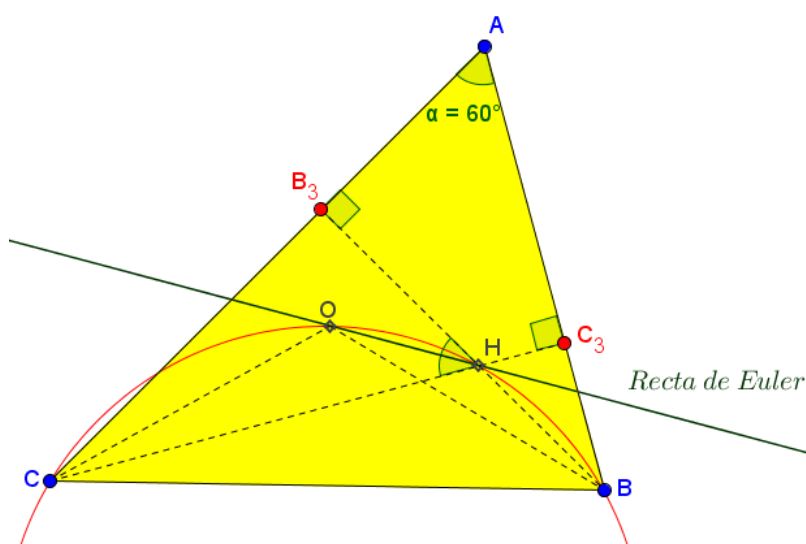
Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

$(\Rightarrow) \angle BAC = 60^\circ$.

Si el ángulo $\alpha = \angle BAC = 60^\circ$, entonces $\angle BOC = 120^\circ$. Como los puntos B_3, H, C_3 y A son concíclicos, tenemos que $\angle B_3HC_3 = 120^\circ$, $\angle CHB_3 = 60^\circ$ y $\angle BHC = 120^\circ$. Entonces los puntos B, H, O y C también son concíclicos.

De esta manera, probar que la Recta de Euler es la bisectriz del ángulo $\angle CHB_3 = 60^\circ$ es equivalente a probar que el ángulo $\angle CHO = 30^\circ$.



Pero esto es cierto, sin más que observar las siguientes igualdades entre ángulos inscritos en la misma circunferencia.

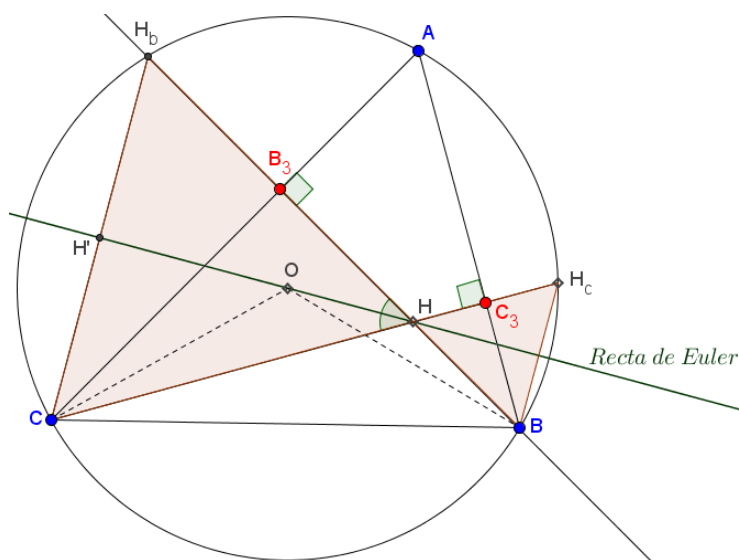
$$\angle CHO = \angle CBO = \angle BCO = 30^\circ.$$

Por tanto, la recta de Euler es bisectriz del ángulo $\angle CHB_3$. $cqd \blacksquare$

$(\Leftarrow)$ La recta de Euler es bisectriz del ángulo $\angle CHB_3$.

El ángulo $\angle CHB_3 = \angle BAC = \alpha$. Esto es fácil de ver al notar que los puntos B_3, H, C_3 y A son concíclicos. Consideramos los puntos H_b y H_c , puntos simétricos de H respecto de B_3 y C_3 , respectivamente. Construimos los triángulos HCH_b y HBH_b . Probaremos que ambos triángulos son equiláteros. Veámoslo para el primero de ellos.

Observamos que la recta de Euler al ser bisectriz del ángulo en H será también mediatriz del lado CH_b .



Por tanto, en el triángulo rectángulo $HH'H_b$ la suma de los ángulos agudos:

$$\angle HH_bC = \alpha \text{ y } \angle HH'H_b = \frac{\alpha}{2}$$

verificarán la relación:

$$\alpha + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ \rightarrow \alpha = 60^\circ \quad cqd \blacksquare$$