

Problema 754

Sobre un ángulo de 60° (VII)

Sea ABC un triángulo con $AB < AC$

Sea O el circuncentro.

Sea H el ortocentro .

Sea B_3 el pie de la altura de B sobre el lados AC .

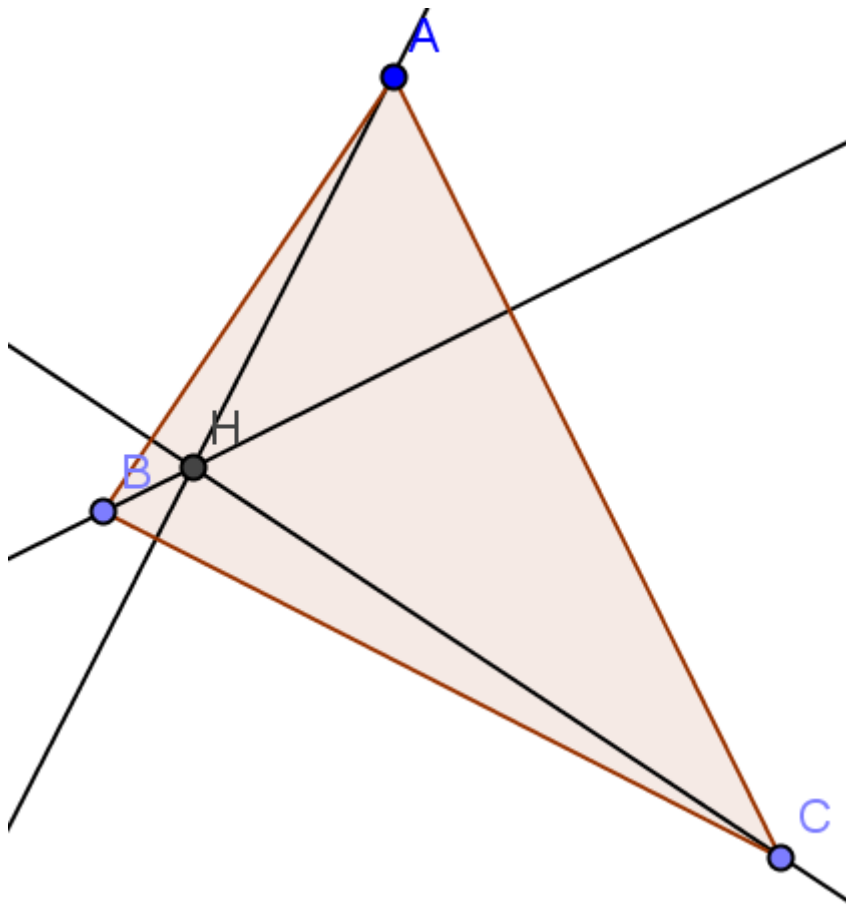
Demostrar que $\angle BAC = 60^\circ$ si y sólo si la recta de Euler es bisectriz del ángulo CHB_3

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

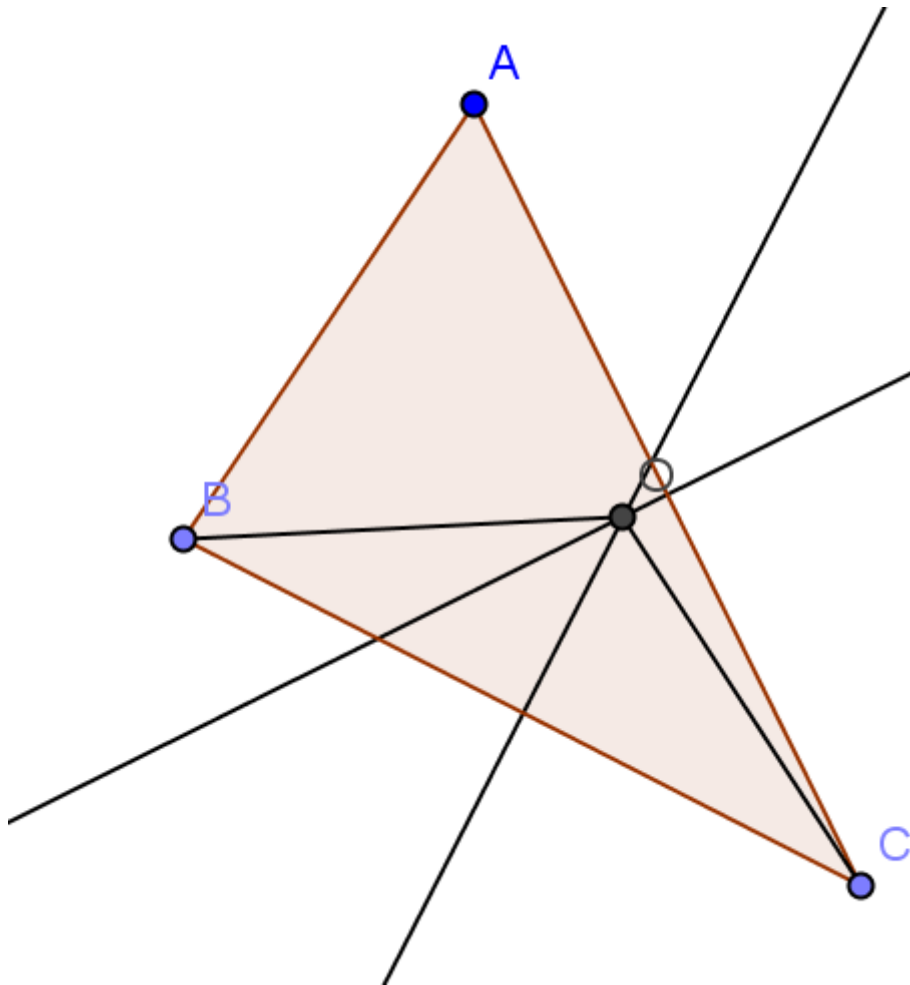
Solución del director.

Sea ABC de ángulos $60^\circ, \beta, 120^\circ - \beta$.

Si $\angle A = 60^\circ$, el triángulo BHC es $\beta - 30^\circ, 120^\circ, 90^\circ - \beta$.



Y el circuncentro O da lugar al triángulo BOC , $30^\circ, 120^\circ, 30^\circ$



Así pues, el cuadrilátero BHOC es inscriptible, siendo:

$\angle CHB_3 = 60^\circ$, $\angle CHO = \angle CBO = 30^\circ$, por lo que obtenemos lo pedido.

Supongamos ahora que la recta de Euler es bisectriz de $\angle CHB_3$.

Sea $\angle ABC = \alpha$, β , γ .

Tenemos que $\angle CHB_3 = \alpha$. Así es $\angle CHO = \alpha/2$

Además es $\angle AHO = \angle AHB_3 + \angle CHO = \gamma + \alpha/2$.

Por otra parte, $\angle HAO = \alpha - (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \beta) = 2\beta + \alpha - 180^\circ = \beta - \gamma$.

Luego $\angle AOH = 180^\circ - \angle AHO - \angle HAO = 180^\circ - (\gamma + \alpha/2) - (\beta - \gamma) = \alpha/2 + \gamma$.

Con lo que el triángulo AHO es isósceles y $AH = AO$ que es condición doble para se $\angle A = 60^\circ$, cqd.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado.

Sevilla