

## Problema 754

Sobre un ángulo de  $60^\circ$  (VII)

Sea  $ABC$  un triángulo acutángulo y escaleno con  $AB < AC$

Sea  $O$  el circuncentro. Sea  $H$  el ortocentro .

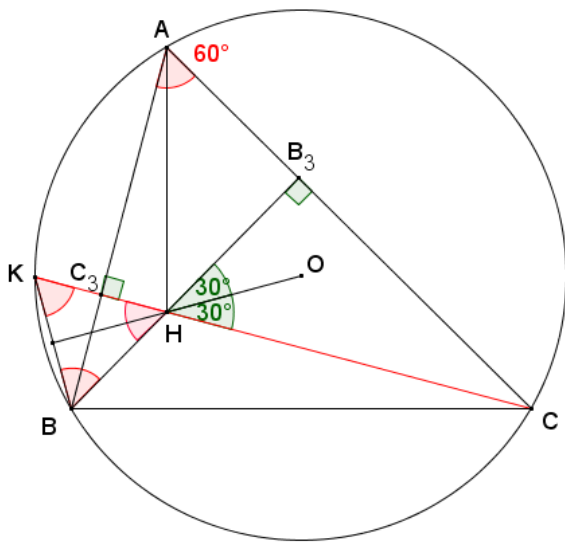
Sea  $B_3$  el pie de la altura de  $B$  sobre el lado  $AC$ .

Demostrar que  $\angle BAC = 60^\circ$  si y sólo si la recta de Euler es bisectriz del ángulo  $\angle CHB_3$  .

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

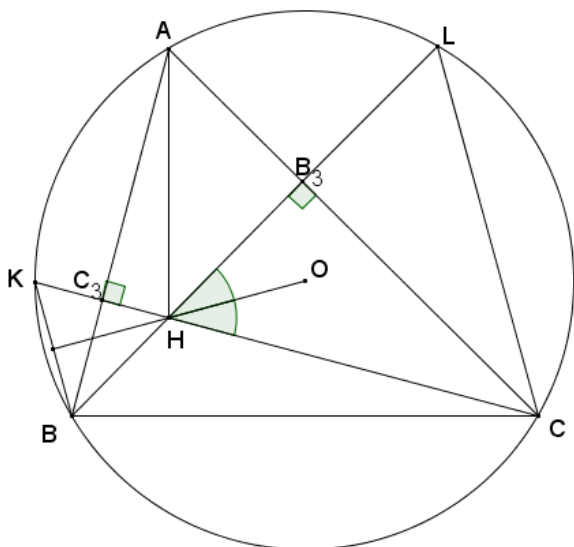
### 1<sup>ère</sup> partie : l'angle en $A$ vaut $60^\circ$

Soient  $C_3$  la projection de  $C$  sur  $AB$  et  $K$  l'intersection de  $CC_3$  avec le cercle circonscrit à  $ABC$  de centre  $O$ . On a  $\angle BKC = \angle BAC = 60^\circ$ ,  $\angle BHK = \angle CHI = 90^\circ - \angle ACH = 90^\circ - (90^\circ - \angle BAC) = \angle BAC = 60^\circ$ . Le triangle  $BHK$  est donc équilatéral.  $H$  est donc à égale distance de  $B$  et de  $K$ . Il en est de même du point  $O$ .  $OH$  qui est la droite d'Euler du triangle  $ABC$  est la médiatrice de  $BK$  et c'est en même temps la bissectrice des angles  $\angle BHK$  et  $\angle CHB_3$ .



### 2<sup>ème</sup> partie : $OH$ est la bissectrice de l'angle $\angle CHB_3$ .

Soit  $L$  le point d'intersection de la droite  $BB_3$  avec le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .



On a les égalités d'angles  $\angle BKC = \angle BAC$ ,  $\angle BHK = \angle CHL = 90^\circ - \angle ACK = \angle BAC$ .

Le triangle BHK est donc isocèle de sommet B. Il en est de même du triangle CHL isocèle de sommet C.

Comme ABC est acutangle, le point O est intérieur au triangle ABC et se trouve soit à l'intérieur du triangle BHC<sub>3</sub> soit à l'intérieur du triangle CHB<sub>3</sub>. Comme  $AB < AC$ , le point O est à l'intérieur du triangle CHB<sub>3</sub>. On a  $OC = OL$  et  $\angle OHB_3 = \angle OHC$ . Les deux triangles OHL et OHC sont superposables et L est le symétrique de C par rapport à OH. Le triangle CHL est isocèle de sommet H. Il est donc équilatéral et  $\angle BAC = 60^\circ$