Problema 755.-

Sobre un ángulo de 60º (VIII)

Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con AB<AC. Sea O el circuncentro. Sea H el ortocentro. Sean B_5 y C_5 respectivamente los puntos de intersección de la recta de Euler con AC y AB.

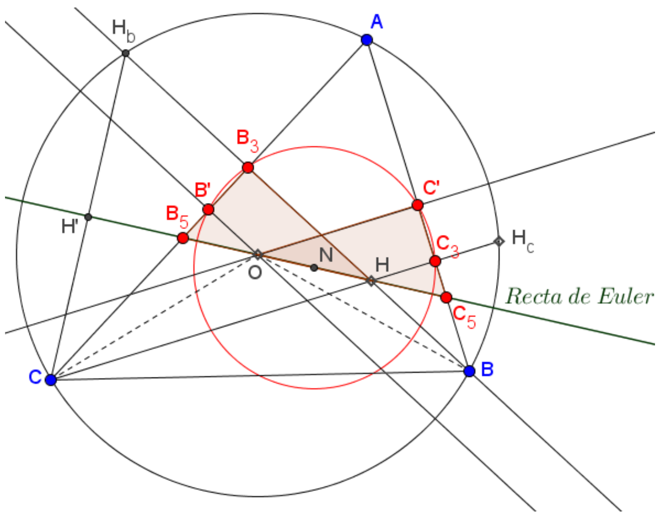
$HB_5=OC_5$ si y sólo si <A=60º.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

(⇒) $HB_5=OC_5$.

Si $HB_5=OC_5$ entonces N, punto medio de OH, será punto medio de B_5C_5. El punto N es el centro de la Circunferencia de Euler y esta circunferencia tiene como radio $\frac{R}{2}$, siendo R el radio de la circunferencia circunscrita l triángulo inicial ABC.

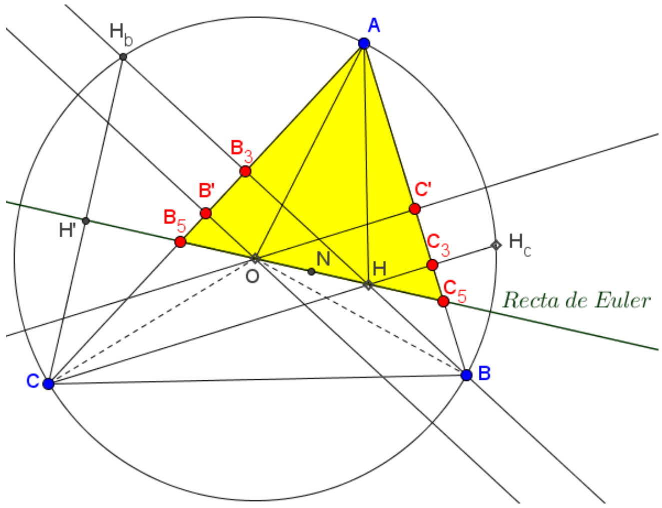


En esta circunferencia resulta que los pares de puntos $(B_3; C')$ y $(C_3; B')$ se corresponden según la simetría axial respecto de la mediatriz del segmento B_5C_5, luego la mediatriz del segmento OH. Por tanto, como los pares de puntos simétricos concurren en el vértice A, resulta que $OA = AH = R$ y, por el problema 747 de la Revista, el ángulo A es de 60º.

$$\measuredangle A = 60º \qquad cqd \quad \blacksquare$$

(⇐) $\measuredangle A = 60º$

Si el ángulo $\measuredangle A = 60º$ entonces, por el mismo problema 747 de la Revista, $OA = AH = R$.



Como por el problema 744, la recta de Euler es bisectriz del ángulo CHB_3, el triángulo AB_5C_5 será equilátero y, por tanto B_5O y C_5O serán iguales.

De este modo, resulta evidente que

$$HB_5 = OC_5 \; cqd \quad \blacksquare$$