

Problema 755

Sobre un ángulo de 60° (VIII)

Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno con $AB < AC$.

Sea O el circuncentro. Sea H el ortocentro .

Sean B_5 y C_5 respectivamente los puntos de intersección de la recta de Euler con AC y AB .

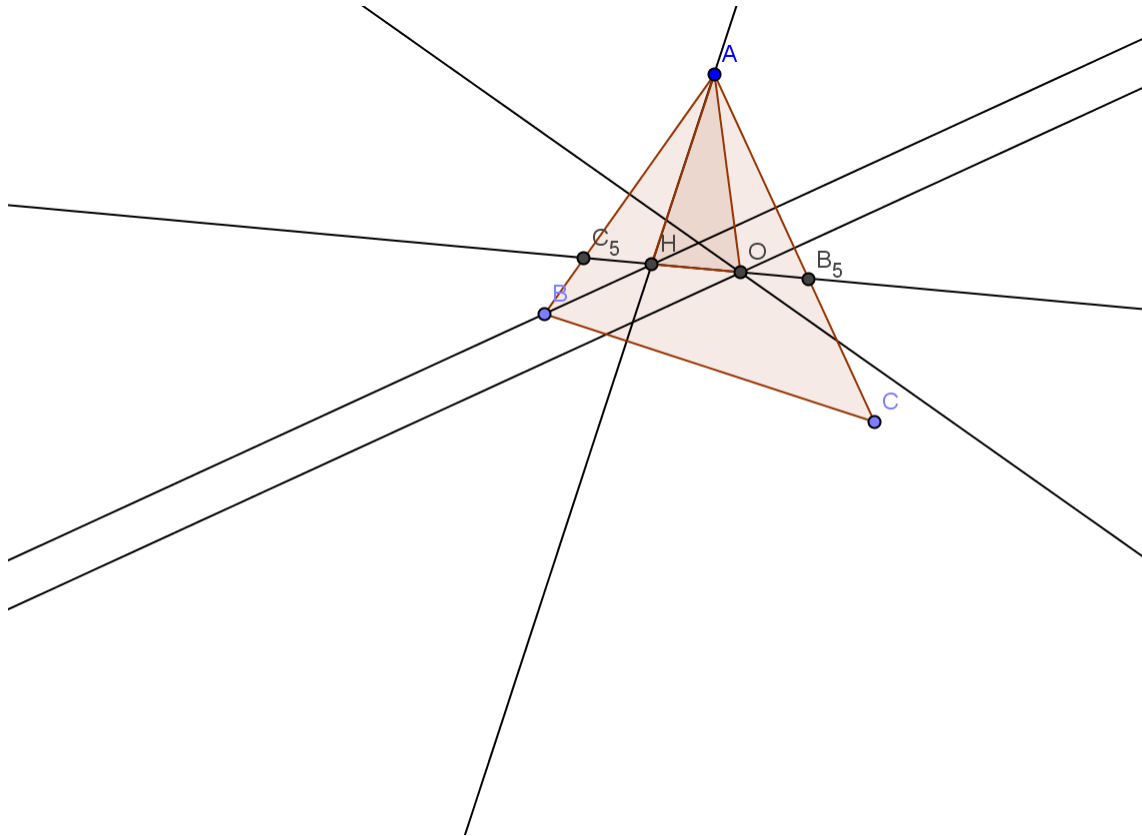
[Actualizado el 17 de Noviembre, gracias a las observaciones de Saturnino Campo y de Ricard Peiró]

$HB_5 = OC_5$ si y sólo si $\angle A = 60^\circ$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

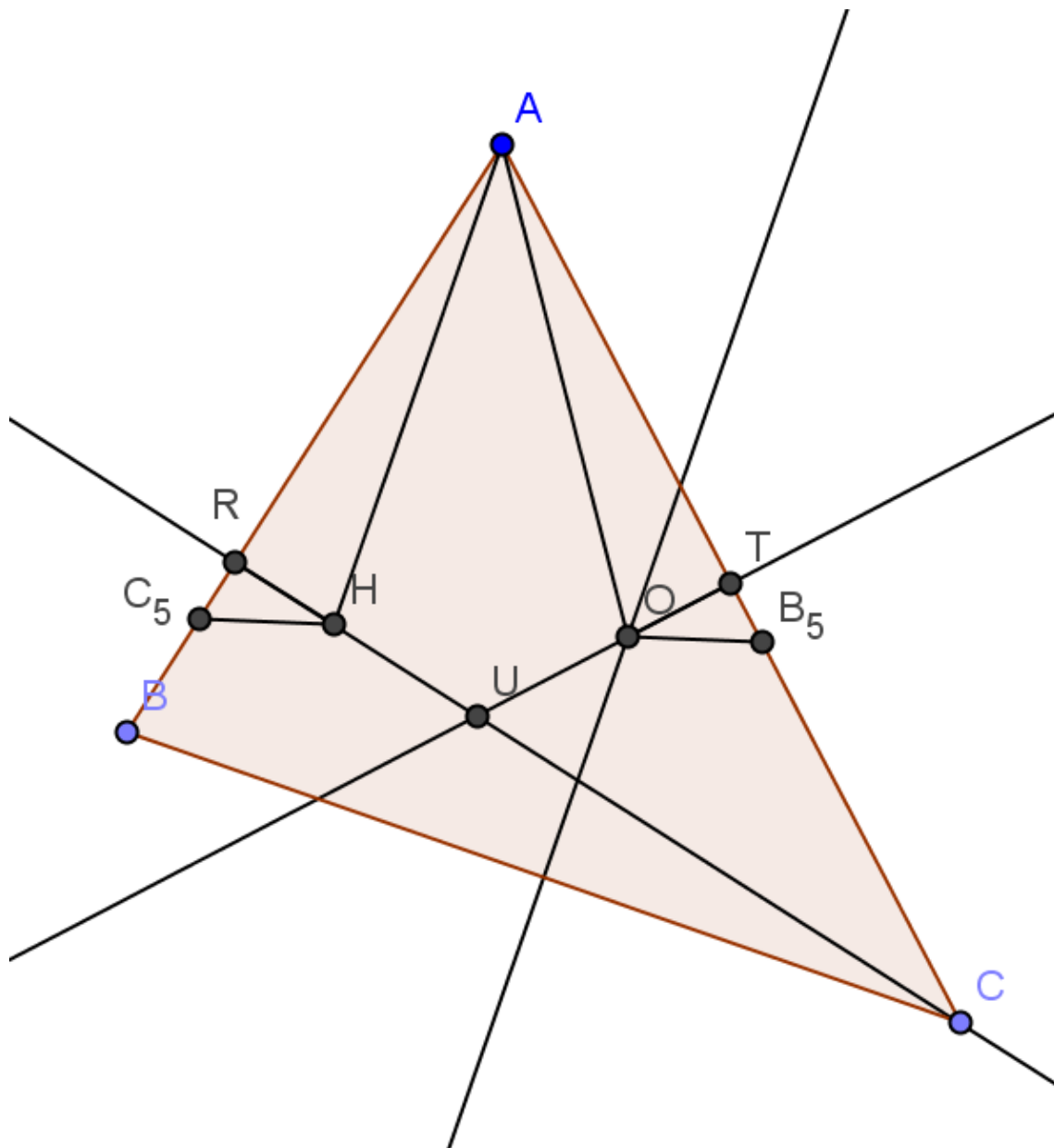
Solución del director.

Si $\angle A = 60^\circ$, el triángulo AOH es isósceles, así, si ABC es $60, \beta, 120 - \beta$, AOH es $2\beta - 120^\circ, 150^\circ - \beta, 150^\circ - \beta$.



Por ello los triángulos AHC_5 y AOB_5 tienen iguales los lados AH y AO , los ángulos en A , $90^\circ - \beta$, y los ángulos en H y O , $30^\circ + \beta$, así como los ángulos en C_5 y B_5 , 60° . Por ello tenemos lo pedido, $HB_5 = OC_5$.

Si $HB_5 = OC_5$, tracemos la altura del vértice C y la mediatriz del lado AC , que se cortarán en U .



$TO=RH$ por ser los triángulos TOB_5 y RHC_5 congruentes por construcción.

Así los triángulos ATO y ARH también lo son, por lo que AOH es isósceles y, según lo estipulado en el problema 747 de trianguloscabri, $\angle A=60^\circ$, cqd.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado. Sevilla.