

Problema 755

Siga $\triangle ABC$ un triangle acutangle i escalè amb $\overline{AB} < \overline{AC}$.

Siguen O el circumcentre, H l'ortocentre.

Siguen B_5 i C_5 , respectivament, els punts d'intersecció de la recta d'Euler amb els costats $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$,

Aleshores, $\overline{HB_5} = \overline{OC_5}$ si i només si $A = 60^\circ$.

Fondanaiche, P. (2015): Comunicació personal.

Solució:

Siga $R = \overline{OA}$ radi de la circumferència circumscrita al triangle $\triangle ABC$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AHC$: $\frac{\overline{AH}}{\cos A} = \frac{b}{\sin B} = 2R$.

($\Rightarrow$)

Suposem $\overline{HB_5} = \overline{OC_5}$. Aleshores $\overline{HC_5} = \overline{OB_5}$.

Siga $\alpha = \angle AC_5B_5$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AC_5O$:

$$\frac{\overline{OC_5}}{\sin(A - 90^\circ + B)} = \frac{\overline{AO}}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \alpha}$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AB_5H$:

$$\frac{\overline{HB_5}}{\sin(A - 90^\circ + B)} = \frac{\overline{AH}}{\sin(\alpha + A)} = \frac{2R \cdot \cos A}{\sin(\alpha + A)} \quad (2)$$

Dividint les expressions (1) (2)

$$\frac{\sin(\alpha + A)}{2 \sin A \cdot \cos A} = 1. \text{ Aleshores, } \alpha = A.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AB_5O$:

$$\frac{R}{\sin 2A} = \frac{\overline{OB_5}}{\cos B} \quad (3)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AC_5H$:

$$\frac{\overline{AH}}{\sin A} = \frac{\overline{HC_5}}{\cos B} \quad (5)$$

Dividint les expressions (3) (5)

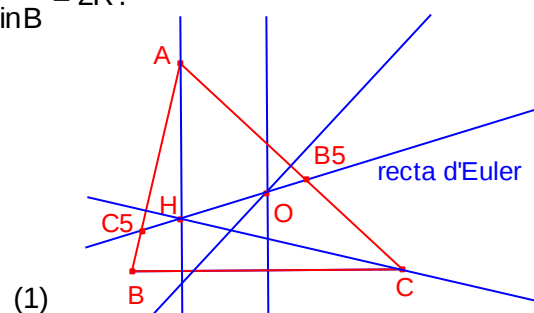
$$\frac{R \cdot \sin A}{\sin 2A \cdot \overline{AH}} = 1 \quad (6)$$

$$\frac{R \cdot \sin A}{\sin 2A \cdot 2R \cdot \cos A} = 1 \quad (7)$$

Simplificant:

$$\cos^2 A = \frac{1}{4}. \text{ Aleshores, } A = 60^\circ.$$

En aquest cas, el triangle $\triangle AB_5C_5$ és equilàter.



($\Leftarrow$)

Suposem que $A = 60^\circ$.

$$\angle C_5AH = \angle B_5AO = 90^\circ - B.$$

$$\frac{\overline{AH}}{\cos 60^\circ} = \frac{b}{\sin B} = 2R.$$

Aleshores, $\overline{AH} = \overline{AO} = R$

Aleshores, el triangle $\triangle AHO$ és isòsceles.

La bisectriu de l'angle A del triangle $\triangle AHO$ és bisectriu de l'angle A del triangle i perpendicular a la base, aleshores, el triangle $\triangle AC_5H_5$ és isòsceles.

Siga M el punt mig del segment $\overline{HO}$

Aleshores, $\overline{HM} = \overline{OM}$ i $\overline{MH_5} = \overline{MC_5}$.

Aleshores, $\overline{HB_5} = \overline{OC_5}$.