Problema 755

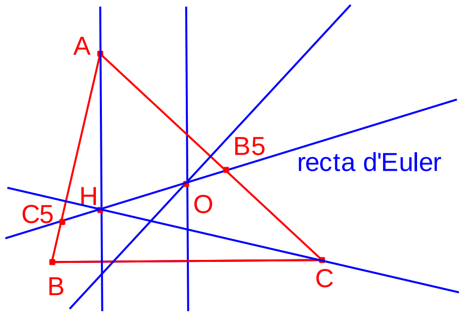
Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ un triángulo acutángulo y escaleno con $\overline{AB} < \overline{AC}$.
Sean O el circuncentro, H el ortocentro.
Sean B_5 y C_5 , respectivamente, los puntos de intersección de la recta de Euler con los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$.
Entonces, $\overline{HB_5} = \overline{OC_5}$ si y sólo si $A = 60^o$.
Fondanaiche, P. (2015): Comunicación personal.

Solución de Ricard Peiró:

Sea $R = \overline{OA}$ radio de la circunferencia circunscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{AHC}$:

$$\frac{\overline{AH}}{\cos A} = \frac{b}{\sin B} = 2R.$$



$(\Rightarrow)$

Supongamos $\overline{HB_5} = \overline{OC_5}$. Entonces $\overline{HC_5} = \overline{OB_5}$.

Sea $\alpha = \angle AC_5B_5$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{AC_5O}$:

$$\frac{\overline{OC_5}}{\sin(A - 90^o + B)} = \frac{\overline{AO}}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha} \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{AB_5H}$:

$$\frac{\overline{HB_5}}{\sin(A - 90^o + B)} = \frac{\overline{AH}}{\sin(\alpha + A)} = \frac{2R\cdot\cos A}{\sin(\alpha + A)} \qquad (2)$$

Dividiendo las expresiones (1) (2)

$$\frac{\sin(\alpha + A)}{2\sin A\cdot\cos A} = 1.$$ Entonces, $\alpha = A$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{AB_5O}$:

$$\frac{R}{\sin 2A} = \frac{\overline{OB_5}}{\cos B} \qquad (3)$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{AC_5H}$:

$$\frac{\overline{AH}}{\sin A} = \frac{\overline{HC_5}}{\cos B} \qquad (5)$$

Dividiendo las expresiones (3) (5)

$$\frac{R\cdot\sin A}{\sin 2A\cdot\overline{AH}} = 1 \qquad (6)$$

$$\frac{R\cdot\sin A}{\sin 2A\cdot 2R\cdot\cos A} = 1 \qquad (7)$$

Simplificando:

$\cos^2 A = \frac{1}{4}$. Entonces, $A = 60^o$.

En este cas, el triángulo $\overset{\Delta}{AB_5C_5}$ es equilátero.

$(\Leftarrow)$

Supongamos que $A = 60^o$.

$\angle C_5AH = \angle B_5AO = 90^o - B$.

$$\frac{\overline{AH}}{\cos 60^o} = \frac{b}{\sin B} = 2R.$$

Entonces, $\overline{AH} = \overline{AO} = R$

Entonces, el triángulo $\overset{\Delta}{AHO}$ es isósceles.

La bisectriz del ángulo A del triángulo $\overset{\Delta}{AHO}$ es bisectriz del ángulo A del triángulo y perpendicular a la base, entonces, el triángulo $\overset{\Delta}{AC_5H_5}$ es isósceles.

Sea M el punto medio del segmento $\overline{HO}$

Entonces, $\overline{HM} = \overline{OM}$ y $\overline{MH_5} = \overline{MC_5}$.

Entonces, $\overline{HB_5} = \overline{OC_5}$.